第三章　函数

本章教学要求及重点难点

- 理解函数的基本概念；
- 证明一个函数是内射、满射、双射函数；
- 熟练掌握函数的复合运算和逆运算；
- 理解有限集和无限集基数的概念。
- 重点：内射、满射、双射函数，复合运算和逆运算。
- 难点：无限集集的基数，集合的等势。

“函数”是数学中的一个基本概念，在离散数学中把它推广成为一种特殊的“关系”。函数主要涉及把一个有限集合变换成另一个有限集合的离散函数。例如，编译程序把一组高级语言命令的集合变成机器语言指令的集合。

§3.1 函数的概念

一，基本概念

函数：设有集合 A、B，f 是一个<u>由 A 到B 的关系</u>，如果对于每个 $a\in A$，存在唯一的 $b\in B$ 使得 afb(或 $f(a)=b$)，则

称关系 f 是由 A 到 B 的一个***函数***，记为 $\boldsymbol{f: A\to B}$。

与函数同义的词：“***映射***”、“***映象***”、“***变换***”、“***对应***”

以数学中的二次函数 $f(x)=3x^2+4x-5$为例

有关习题：

作为关系，函数 f 也有“定义域”和“值域”，但对这两个概念有一些特别的规定：

定义域：在函数 $f: A \to B$ 中，称集合 A 为函数 f 的***定义域***，也就是关系的定义域 $D_f = A$

值域包：在函数 $f: A \to B$ 中，称集合 B 为函数 f 的***值域包***。

在函数 $f: A \to B$ 中，若有 afb，则称 b 为 a 的***像***，用 $f(a)$ 表示，并称 a 为 b 的***像源***，也称 a 为***自变量***，b 为***函数 f 在 a 处的值***。用 $f(A)$ 表示函数的值域。

显然有 $R_f \subseteq B$

特别地，若定义域 A 是一个笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，则自变量是一个 n 元组 $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$，其函数值就是 $f((a_1, a_2 \cdots, a_n))$，可简写成：$f(a_1, a_2 \ldots, a_n)$

有关习题：

基本概念

我们从反面来理解函数，看什么样的关系 **不是函数**?

(1) 在关系 f : $A \to B$ 中，若对于某个 $a \in A$，不存在 $b \in B$，使得 $a\,f\,b$ ，则 f 不是函数

例： $f = \{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in N, n_2 = \text{小于 } n_1 \text{ 的素数的个数}\}$

(2) 在关系 f : $A \to B$ 中，若对于某个 $a \in A$，存在 $b_1 \in B$ 和 $b_2 \in B$ ，且 $b_1 \neq b_2$，使得 $af\,b_1$ 和 $af\,b_2$ 同 时成立，则 f 不是函数。即“一对二”就不是函数

例： $f = \{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in N, n_1 + n_2 < 10\}$

练习：在笛卡尔积 $A \times B$ 的诸多子集中，有多少子集能构成函数?

分别设 A 和 B 的基数为：$\#A = \mathrm{m}$，$\#B = \mathrm{n}$，则由 A 到 B 的不同函数有且只有 n^{m} 种

有关习题：

例1：设有二次函数 $f(x)=3(x+2)^2-5$, 写出定义该函数的两个集合，写出该函数的定义域和值域包

解: 设该函数是集合A到集合B的函数

则，A就是实数集合R

B可以是实数集合R, 也可以是大于 -10 的实数集合

函数的定义域也是实数集合R

有关习题：

例1：设 A={a，b，c，d}，B={6，7，8，9，10}

f = {（a，8），（b，9），（d，10），（c，6）}

则，f 是一个由 A 到 B 的函数

$D_f = \boldsymbol{A}$ ， $R_f = f(A)$ ={6，8，9，10}

f (a)＝8， f (d)＝10， f (c)＝6

例2：设 $A= I$，$B= N$，$f =\{ (i, \left|2i\right|+1) \mid i\in I \}$，或

$$f(\mathrm{i})= \left|2i\right|+1 \quad (i\in I)$$

则，f 是一个由整数集 I 到自然数集合 N 的函数

$f(A)$ = 全体正奇数的集合

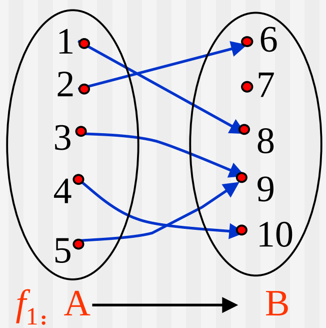
有关习题：

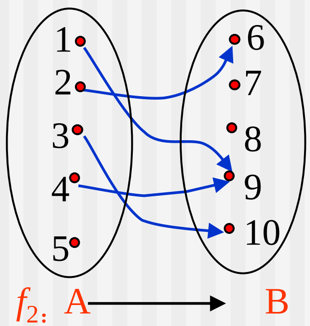
例3：设 A={1，2，3，4，5}，B={6，7，8，9，10}。分别确定下列各式中的 f 是否为由 A 到 B 的函数？

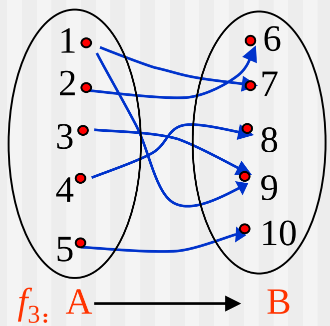
f_1 = { (1，8)，(3，9)，(4，10)，(2，6)，(5，9) } (1)

f_2 = { (1，9)，(3，10)，(2，6)，(4，9) } (2)

f_3 = { (1，7)，(2，6)，(4，8)，(1，9)，(5，10)，(3，9) } (3)







有关习题：

说明：(1) 函数是集合，也是关系，是笛卡尔积 $A\times B$ 中的一个子集。应尽可能地对照“关系”的概念进行学习。

(2) 笛卡尔积 $A\times B$ 中的每一个子集都是由 A 到 B 的一个关系，但这些关系并不都能构成函数，把能够定义成函数的这些子集用 $\boldsymbol{B^A}$ 表示。

则，$\#(B^A)=(\#B)^{\#A}$

(3) 在函数的定义中，如果集合 A 和 B 都是通常的数集，则这里定义的函数就是数学中的函数，其中“自变量”、“定义域”、“值域”等概念与数学中的函数一致。因此，离散数学中的函数概念是通常函数概念的推广。

(4) 谈到函数，必须涉及两个集合：定义域 A、值域包 B。在证明题中，需首先明确定义域 A 和值域包集合 B

有关习题：**p112** 1@、2 @ 、3 @

⑸ 函数是一个由 A 到 B 的关系，其特殊性表现在对集合 A、B 的元素有一些不同于一般关系的限制：

① 对集合 A 的元素限制，规定 A 的每一个元素都必须是自变量，即 A 的每一个元素都必须在集合 B 中有“像”——像的存在性。

② 对集合 B 的元素限制，对于 A 中的任意一个元素 a，集合B 中有且只有一个元素与之对应———像的唯一性

⑹ 由像的存在性可知，定义域 $D_f = A$ 本身，而不能只是 A 的子集，与一般关系的定义域不同

而对值域包 B 没有这样的限制，所以有 $R_f \subseteq B$，与一般关系的值域概念一致。

说明

有关习题：**p112** 1@、2 @ 、3 @

(7) 由像的存在性和唯一性可知，集合 B 不能为空

(8) 像的存在性和唯一性是判断一个关系是否是函数的主要依据，也是证明有关函数等式的一种重要思路。

思考：设 $A=2^U\times 2^U$，$B=2^U$，给定由 A 到 B 的关系：

$$f=\{((S_1,\ S_2),\ S_1\cap S_2)\mid S_1,\ S_2\subseteq U\}$$

f 是函数吗？若是的话，f 的值域 $R_f=2^U$ 吗？为什么？

有关习题：**p112**　1@、2 @ 、3 @

课堂练习

1，选择：设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$，令 $f: A\to B$，则不同的函数个数为( )

A. 2+3 个　B. 2^3 个　C. 2×3 个　D. 3^2 个

2，填空：设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，R、S、T 是 A 到 B 的关系，且 $R=\{(a,1), (b,2), (c,2)\}$，$S=\{(a,1),(a,2)\}$，$T=\{(a,1), (b,1), (c,1)\}$，则三个关系中______可定义为 A 到 B 的函数

3，下面的关系哪些是函数？其中 xRy 定义为 $x^2+y^2=0$，x、y 为实数。

(1) $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$　(2) $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$

(3) $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$　(4) x 任意，$0\le y\le 1$

作业

p112 习题 1、2、3

作业

二，函数相等

函数相等：设有函数 f：$A\rightarrow B$ 和 g：$C\rightarrow D$，如果 $A=C$ 和$B=D$，并且对所有的 $a\in A$（或 $a\in C$）都有 $f(a)=g(a)$，则称函数 f 和 g 是***相等***的，记为 $f=g$

思考：设有函数 f：$A\rightarrow B$，$S\subseteq A$，等式 $f(A)-f(S)=f(A-S)$ 成立吗？为什么？

有关习题：4、5

三，特殊函数

内射：设有函数 f 是一个由 A 到 B 的函数， 若当 $a_i \neq a_j$ 时，有 $f(a_i) \neq f(a_j)$，或者说，当 $f(a_i)=f(a_j)$ 时，有 $a_i=a_j$，则称 f 为由 A 到 B 的*内射*

例1： 函数 g：$Z \to N$， 定义为 f（z）$=2z+1$ 内射函数

例2： 函数 h：$R_0 \to R$， 定义为 $h(a)=a^2$ (R_0 为非负实数集) 内射函数

例3： 函数 h：$R \to R$， 定义为 $h(a)=a^2$ 不是内射函数

三，特殊函数

有关习题： **p113** 7@、8@、9@、10、11、12

满射：设有函数 f 是一个由 A 到 B 的函数，若 $f(A)=B$，则称 f 为由 A 到 B 的***满射***

例4：看函数 f：$I\rightarrow Z_5$，定义为 $f(\mathrm{i})=\mathrm{res}_5(\mathrm{i})$，属于哪种函数?

这是由整数集到集合{0,1,2,3,4}的满射，但不是内射

回头看前面的例1、例2、例3

双射：设有函数 f 是一个由 A 到 B 的函数，若 f 既是内射又是满射，则称 f 为由 A 到 B 的***双射***

例5：看函数 f：$2^U\rightarrow 2^U$，定义为 $f(S)=S'$，属于哪种函数?

这是由 U 的幂集到自身的双射

满射、双射

有关习题：**p113**　7@、8@、9@、10、11、12

课堂思考： 像内射的定义那样，用 A、B 的成员之间的关系来叙述：(1) 函数 f：$A\to B$“是满射”；

(2) 函数 f：$A\to B$“是双射”

课堂思考： 像内射的定义那样，用 A、B 的成员之间的关系来叙述：(1) 函数 f：$A\to B$“不是内射”；

(2) 函数 f：$A\to B$“不是满射”

课堂思考

有关习题：

例6：设集合$A=\{a_1, a_2 \cdots, a_n\}$，$B=\{0, 1\}$。对于 A 的任一子集S，我们把它与有序 n 元组 $f(S)=(b_1, b_2 \cdots, b_n)$ 对应，其中：

$$b_i=\begin{cases}1 & 若\ a_i \in S \\ 0 & 若\ a_i \notin S\end{cases}$$

试证明 f 是一个由 A 的幂集 2^A 到 B^n 的双射函数。

分析：题目没有说明 f 是函数，必须先证明它是函数，此题此结论是显然的

证明：(1) 证明满射

对于任意 n 元组$(b_1, b_2 \cdots, b_n) \in B^n$

令 $S=\{a_i \mid a_i \in A$，当 $b_i=1$ 时$\}$

则有 $S \subseteq A$ 且 $f(S)=(b_1, b_2 \cdots, b_n)$

(针对 B^n 的任意元素找到了相应的像源)

$\therefore f$ 是满射函数

有关习题：

(2) 证明内射

设 B^n 的任一元素（b_1，b_2 …，b_n）有两个象源 S_1 和 $S_2 \in 2^A$

即 $f(S_1)=f(S_2)=(b_1, b_2 \cdots, b_n)$

则对于任意 $a_i \in S_1$，有 $b_i = 1$ ，因此，有 $a_i \in S_2$

反过来亦如此

$\therefore S_1 = S_2$ （B^n 的同一个元素的像源相等)

$\therefore f$ 是内射函数

$\therefore f$ 是双射函数，原结论正确

有关习题：**p113** 7@、8 @ 、9 @ 、10、11、12

恒等函数：集合 A 上的恒等关系 $I_A = \{(a,\ a) \mid a \in A\}$ 显然是一个由 A 到 A 的双射。称 I_A为集合 A 上的***恒等函数***。

说明：

(1) 函数的若干概念是在关系的基础上逐步增加限制条件得到的

关系：笛卡尔积的任意子集

函数：满足像的存在性和唯一性的关系

满射：值域包被充满了的函数 (函数定义中允许值域包不被充满)

内射：自变量与函数值呈“一对一”的函数
(函数定义中允许“多对一”)

双射：既满足值域包被充满的条件，又满足自变量与函数值呈“一一对应”的函数。

(2) 三种特殊函数中，定义域 A 和值域包 B 的基数间的关系：

满射：#A≥#B

内射：#A≤#B

双射：#A= #B

有关习题：**p113** 7@、8 @ 、9 @ 、10、11、12

课堂练习

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，考虑 A 到 A 的函数：$f_1(n)=n$，$f_2(n)=6-n$，$f_3(n)=\max(3, n)$，$f_4(n)=\max(1, n-1)$

(1) 将上述函数写成序偶的集合；

(2) 将上述函数看作特殊的关系，作出关系图；

(3) 哪些函数是内射，哪些函数是满射?

有关习题：p70 习题 3-3

关于内射、满射和双射的证明

如果能用列表法列出函数的全部序偶，则可以直接作出判断，否则注意：

1. **规范**：① 确认函数的定义域 A 和值域包 B；
   ② 证明后必须写明：函数是否内射？是否满射？是否双射？

2. **证明满射**：一般是从值域包出发

   ①对任意 $b \in B$，都能在 A 中找到（或至少能找到，或具体找到了）一个 a，使 $f(a)=b$，则 f 就是满射；

   ② 对某个 $b \in B$，在 A 中不存在任何元素使 $f(a)=b$ 成立，则 f 就不是满射

   ③ 函数的值域包不等于值域，则 f 就不是满射

有关习题：**p113**　7@、8@、9@、10、11@、12@

关于内射、满射和双射的证明

3. 证明内射：

① 对任意 $b \in B$，若在 A 中有且只有唯一的 a，使 $f(a)= b$，则 f 就是内射

② 对任意 a_1，$a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$，证明 $f(a_1) \neq f(a_2)$，则 f 就是内射；

③ 对某 a_1，$a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$，得到 $f(a_1) = f(a_2)$，则 f 就不是内射

④ 对某 $b \in B$，在 A 中至少有两个或两个以上（或已经找到了两个）元素 a_1，$a_2 \in A$ 使 $f(a_1)= b$ 和 $f(a_2)= b$ 都成立，则 f 就不是内射

4. 证明双射：(1) 证明函数既是满射又是内射

(2) 值域包的每一个元素都有唯一的像源

有关习题：**p113**　7@、8 @ 、9 @ 、10 、11 @、12 @

§ 3.2 函数的复合

定义

设有函数 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$，则 f 和 g 的***复合函数***是一个由 A 到 C 的函数，记为 $g\cdot f: A\to C$ (或记为 $gf: A\to C$)

即对于任一 $a\in A$，$(g\cdot f)(a) = g(f(a))$

注意：

(1) “复合函数”的记法与“<u>复合关系</u>”有些不同，在关系复合中是“fg”, 而函数复合中是“ gf ”

(2) “复合函数”是“复合关系”的一种特殊情况。因此，复合关系的性质对复合函数同样是成立的。例如“结合律”和定理：$f\cdot I_A = I_B\cdot f = f$

有关习题： **p113**　　6、13@、14 @ 、15、17 @ 、31

定理3-1：设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，$h: C \to D$，

则 有 $h(g f) = (hg) f$

注：(1) 这就是函数复合的结合律

(2) 有了结合律，多个函数 f_1， f_2， … f_n 的复合就可以不用括号，而写成： $\boldsymbol{f_1 f_2 \cdots f_n}$

特别，当这些函数都是由同一个集合 A 到 A 时，它们的复合函数表示成： $\boldsymbol{f^n}$

有关习题：**p113** 6、13@、14 @ 、15、17 @ 、31

例 1 设 $A = \{1, 2, 3\}$， $B = \{a, b\}$， $C = \{e, f\}$

$f: A \rightarrow B$， $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$

$g: B \rightarrow C$， $g = \{(a, e), (b, e)\}$

则 $g\ f = \{(1, e), (2, e), (3, e)\}$

注：**这是用关系复合的定义，求复合函数的方法**

有关习题：**p113**　6、13@、14 @ 、15、17 @ 、31

例

例 2 设函数 $f：2^A \to Z$ 其中 A 是一有限集合，$f(S)=\#S$，函数

$g：Z \to R$，$g(z)=\dfrac{Z-5}{2}$ 求复合函数 $gf：2^A \to R$

解：对任意 $S \subseteq A$ 有 $(gf)(S)=g(f(S))=g(\#S)=\dfrac{\#S-5}{2}$

注：这种求复合函数方法是把一个函数的表达式整个作为一个变量代入另一个函数的表达式中。代入方法是从右到左，逐个函数代入。

注意：

(1) 做题前要弄清：复合函数的定义域集合和值域包集合各是什么？（从哪里到哪里？）

(2) 自变量——定义域集合的元素应有怎样的表现形式？

(3) 因变量——值域包集合的元素应有怎样的表现形式？

有关习题：**p113** 6、13@、14@、15、17@、31

幂等函数：设有函数 f：A→A，且 $f^2 = f$，则称 f 为***幂等函数***

定理：若函数 f 是幂等的，则 f^n 也是幂等的($n \in N$，且 $n \geq 1$)

定理3-2：设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，那么：

(1) 如果 f 和 g 都是内射，则 gf 也是内射；

(2) 如果 f 和 g 都是满射，则 gf 也是满射；

(3) 如果 f 和 g 都是双射，则 gf 也是双射。

定理3-3：设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$，那么：

(1) 如果 gf 是内射，则 f 是内射；

(2) 如果 gf 是满射，则 g 是满射；

(3) 如果 gf 是双射，则 f 是内射而 g 是满射。

有关习题：**p113**　　6、13@、14 @ 、15、17 @ 、31

幂等函数、定理2、定理3

例：设函数 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$, f 是满射, 且 gf 是一个内射, 证明: g 是内射。并举例说明, 若 f 不是满射, 则 g 不一定是内射。

证：(1) 对于任意 b_1，$b_2\in B$，且 $b_1\neq b_2$

$\because$ f 是满射

$\therefore$ 存在 $a_1, a_2\in A$, 使 $f(\mathrm{a}_1)=b_1$, $f(\mathrm{a}_2)=b_2$

由函数的“唯一性”知 $a_1\neq a_2$

由复合函数的定义知，

存在 $c_1, c_2\in C$，使 $gf(\mathrm{a}_1)=c_1$， $gf(\mathrm{a}_2)=c_2$

即 $g(\mathrm{b}_1)=c_1$， $g(\mathrm{b}_2)=c_2$

$\because$ gf 是内射

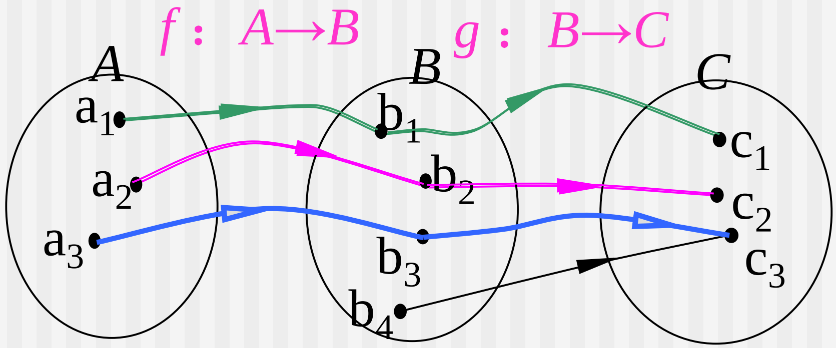
$\therefore$ 由 $a_1\neq a_2$ 可得 $c_1\neq c_2$ 即 $g(\mathrm{b}_1)\neq g(\mathrm{b}_2)$

$\therefore g$ 是内射

有关习题： 6、13@、14@、17@

例

(2) 举例，$g\,f$ 是一个内射，若 f 不是满射，则 g 不一定是内射



有关习题：　　6、13@、14@、17@

例

§ 3.3 逆函数

在关系中有“逆关系”的概念，这里也有的“逆函数”的概念

一个关系的逆关系不一定能称为函数。

例 1 设 $A = \{1, 2, 3\}$， $B = \{a, b, c, d\}$

$f: A \to B$， $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

f 的逆关系 $\tilde{f} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

显然，$\tilde{f}$ 不满足函数定义中的“存在性”，d 没有像。

所以，$\tilde{f}$ 不是由 B 到 A 的函数

逆函数：设有函数 $f: A \to B$ 是一个双射，定义函数 $g: B \to A$，使得对于每一个元素 $b \in B$，有 $g(b)=a$ （$a \in A$，且 $f(a)= b$ 成立)，则称 g 为 f 的***逆函数***，记作 f^{-1}。若函数 f 存在逆函数 f^{-1}，则称 f 是***可逆的***。

定义3-8：设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to A$，若 $g \cdot f = I_A$，则称 g 是 f 的***左逆函数*** f 是 g 的***右逆函数***

有关习题： 15@、16 @

逆函数的性质：

(1) 只有双射函数才能定义逆函数，双射函数的逆函数也是一个双射函数(为什么？)。

双射函数的逆函数也就是其关系的逆关系。

(2) 一个双射函数的逆函数的逆函数就是该函数本身，即

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

(3) 如果函数 f：$A \to B$ 可逆，则有恒等式：

$f^{-1}f = I_A$， $f f^{-1} = I_B$ (注意：I_A 和 I_B 是不同的恒等函数)

证：由复合函数的定义，$f^{-1}f$ 是由 A 到 A 的函数

对任意 $a \in A$，设 $f(\mathrm{a})=\mathrm{b}$，则 $f^{-1}(\mathrm{b}) = a$

于是，$f^{-1}f(\mathrm{a}) = f^{-1}(f(\mathrm{a})) = f^{-1}(\mathrm{b}) = a$

$\therefore f^{-1}f = I_A$

逆函数的性质

有关习题：15@、16 @

⑷ 设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$B \to A$，当且仅当

$gf = I_A$， $fg = I_B$ 时有：$g = f^{-1}$

(注：这是判断逆函数的一种方法)

⑸ 对于可逆函数 f：$A \to B$ 和 g：$B \to C$ 有：

$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$

⑹ 内射函数有左逆函数，反之，有左逆函数的函数一定是内射的。

满射函数有右逆函数，反之，有右逆函数的函数一定是满射的。

有关习题：15@、16 @

§ 3.7 集合的基数

定义3-11：设有集合 A、B，如果存在一个双射函数 f：$A \to B$，则说 A 和 B 有***相同的基数***，或者说 A 与 B ***等势***，记作 $\boldsymbol{A \sim B}$。

换一种说法：对于两个无穷集合，若它们的元素能够一一对应，就说它们有***相同的基数***，或曰“***等势***”

例 1：考察自然数集合与偶数集合，它们是否同基?

例 2：整个正实数集与一个区间（0，1）等势。

有关习题：

在等势的两个集合间，双射的函数可能不止一个，但只要有一个双射函数存在，就可说它们等势。

“等势”指的是两个集合之间的一种关系，对于若干个集合组成的集合族，有下面的定理。

定理 3-14：等势是任何集合族上的等价关系。

等势关系“～”还可写成如下形式：

～ ={(*A*、*B*) | *A*、*B* 上至少存在一个由 *A* 到 *B* 的双射，*A*、*B*∈集合族 *S* }

有关习题：

既然“等势”关系是集合族上的等价关系，那么，它就会在集合族上形成一个分划。而分划结果会形成若干等价类。即，集合族中相互间等势的若干集合形成一个等价类。对这些等价类有如下说法：

基数类：由集合族 S 上的“等势”关系“~”所导致 S 的等价类

又称为***基数类***，凡属于同一基数类的集合称为***同基***。

有限集：如果集合 A 与集合 $N_m=\{1, 2, \ldots, m\}$(m 是某一正整数)属于同一基数类，则称集合 A 是***有限集***，$\#A = m$。不是有限集的集合称为***无限集***。

有关习题：P115　27

基数类、有限集

定义3-13：　若无限集合 A 与自然数集 N 等势，

则称集合 A 是***可数集***；

若无限集合 A 不与自然数集 N 等势，

则称 A 为***不可数集***。

有限集与可数集统称为***可计数集***。

注意：　(1) 有限集的元素个数是有限的；

可数集的元素个数是无限的。

有限集肯定不是可数集。

(2) 所谓可数集，就是其“全部元素可以排成一个“**无穷序列**”的集合。这也是可数集的充分必要条件。是可数集的另一种定义。

有关习题：

可数集

例：整数集 I = {…，−3，−2，−1，0，1，2，…}
是一个可数集。

是把整个整数集合按如下图示排成一个与自然数一一对应的无穷序列：

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \quad \cdots\cdots$$

这个对应关系显然是一个双射，其函数式可以写成：

$$f(\mathrm{i})=\begin{cases} 2\,|\,\mathrm{i}\,| & \mathrm{i} > 0 \\ 2\,|\,\mathrm{i}\,| + 1 & \mathrm{i} \le 0 \end{cases}$$

有关习题：

例

无限集的性质:

定理3-15：任一无限集 A 至少包含一个可数子集。

证：从 A 中取一个元素 a_1，做成集合 $B=\{a_1\}$，

$\because A$ 是无限集，$\therefore A-B\neq\varnothing$

$\therefore$可在 $A-B$ 中还可取一个元素 a_2 加到集合 B 中得 $B=\{a_1, a_2\}$

由于 A 是无限的，$A-B$ 也是无限的

我们就得到了一个由 A 中互不相同的元素组成的无穷序列:

$$B=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

显然，B 是一个可数集，并且，B 是 A 的子集

定理得证

注：这里用构造对象的方法，即构造无穷序列

有关习题：26

注意：

(1) 可数集与自然数集合等势，是说它们之间存在一个双射函数。要么，像上面例子那样列出该函数的表达式；要么证明存在一个双射函数。

(2) 所有的无限集分成两种，“可数集”和“不可数集”

(3) “可数集能够排成一个无穷序列”是指：

该集合的元素可以按 a_1，a_2，… 的顺序有规律地排列出来，并且，

① 当指定序号时，能确定该序号的元素；

② 当指定元素时，能确定该元素的序号。

思考：序列“a_1，a_2，a_3，…，b_1，b_2，b_3，…”是否有规律的无穷序列？

有关习题：

例： 证明任一无限集合都包含与它自身等势的真子集

证： 设 A 是无限集

根据定理 15，存在 $B \subseteq A$，且 B 是一个可数集,

设为 $B = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$

取 A 的真子集 $A_1 = A - \{a_0\}$

作函数 $f: A \to A_1$

$$F(x) = \begin{cases} a_{i+1} & 若\ x \in B \\ x & 若\ x \notin B \end{cases}$$

显然 f 是一个双射函数

$\therefore A \sim A_1$

原命题成立

注： (1) 这里用到了称为 "错位对应" 的方法。

在无限集合的证明中它是一种常用的方法。

(2) 任何有限集合都不可能与自身的真子集等势，而上面证明了无限集合却一定与其自身的某真子集等势。

因此，我们用它作为无限集的定义

有关习题：26

定理3-16： 可数集的任何一个无限子集仍是可数集。

证明：既是可数集，就可以排列成无穷序列，从序列中顺序取出该子集的元素，就是该子集的一个无穷序列。有了无穷序列，该子集就是可数集。

定理3-17： 可数集与有限集的并集仍是可数集。

定理3-18： 两个可数集的并集仍是可数集。

定理3-20： 有限个可数集的并集仍是可数集。

定理3-22： 可数个可数集的并集仍是可数集。

有关习题： 22、23 @

定理16--22

例：证明有理数集 Q 是一个可数集。

证明：构造序列组 $A_i = \{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \ldots\}$ $(i = 1，2，3，\ldots)$

显然，这里每一个 A_i 都是可数集，而 i 从 1 变到 ∞时，A_i 形成可数个可数集。

然而，所有 A_i 包括了全体正有理数，即正有理数集$Q^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

根据定理 22，正有理数集 Q^+ 是可数集

同理可证，负有理数集 Q^- 也是可数集

而有理数集 $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$

∴有理数集 Q 是可数集

证毕

有关习题：22、23 @

定理3-23：集合 $R_1 = \{x \mid x \in R，0 < x < 1\}$是<u>不可数集</u>

证：由于集合 R_1 的元素全都界于 0 和 1 之间，

∴集合 R_1 的元素都可写成无限的十进制小数

$$0.a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

其中 a_i 是 0，1，…，9 中的某一个数，并规定有限小数后面全是 0。

这就使 R_1 的每一个元素都被唯一地表示成上述形式。

假设 R_1 是可数集，则它的元素可以编号排列如下：

$$a_1 = 0.a_{11} a_{12} a_{13} \ldots a_{1n} \ldots$$

$$a_2 = 0.a_{21} a_{22} a_{23} \ldots a_{2n} \ldots$$

…… ……

$$a_n = 0.a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots$$

…… ……

这个假设意味着所有符合条件 $0<x<1$ 的实数 x 都应该被包括在此无穷序列中

然而我们构造这样一个实数：$b = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ ，其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & 若\ a_{ii} \neq 1 \\ 2 & 若\ a_{ii} = 1 \end{cases}$$

b 显然符合条件 $0<x<1$，即 $b \in R_1$，但 b 与上述无穷序列的所有实数都不相同，即 b 不属于上述无穷序列

这与假设矛盾，所以，R_1 不是可数集

这个定理和证明是德国数学家康托（Cantor, G. 1845—1918）给出的。证明方法又叫做 “康托对角线法”

有关习题：

定理3-24：实数集合 R 是不可数集。

证：构造函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}-1 & 0<x\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2(x-1)}+1 & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$

这是一个由R_1到 R 的函数。

在区间（0，$\frac{1}{2}$]内，函数值充满 R 的 [0，∞）部分；

在区间（$\frac{1}{2}$，1）内，函数值充满 R 的（$-\infty$，0）部分。

显然，f 是一个双射函数。

$\therefore R\sim R_1$

由于 R_1是不可数集，所以 R 是不可数集

有关习题： 25@

定理24

基数的比较:

两个有限集的基数是可以比较大小的。
两个无限集，也可对它们的基数比较大小:
(设有无限集 A、B)

定义: (1) 如果存在一个从 A 到 B 的双射函数，
则称 A、B 有***相同的基数***(或***等势***),
记为 $\#A = \#B$

(2) 如果存在一个从 A 到 B 的内射函数，
但不存在双射函数，则称 A 的基数
小于 B 的基数，记为 $\#A < \#B$
或者 $\#B > \#A$

有关习题: 24

定理：对于集合 A、B，

如果存在内射函数 f：$A \to B$ 和 g：$B \to A$，

则 $A \sim B$。

定理 3-25：

设 A、B 是两个无限集，

若有 A 的子集 A_1 和 B 的子集 B_1 使得

$$A \sim B_1, \quad B \sim A_1,$$

则 $A \sim B$。

有关习题： 24

定理25

有限集中，有基数最小的集合 $\varnothing$，

无限集中基数最小的集合是什么?

定理：可数集是无限集中基数最小的一类集合。

证明：$\because$ 所有可数集都与自然数集合等势

$\therefore$ 所有可数集都有相同的基数

$\because$ 任何无限集必包含一个可数集（定理 15）

即, 任何无限集都至少有一个可数集作为其真子集

$\therefore$ 任何无限集的基数都大于或等于可数集的基数

原命题得证

有关习题： 24

最小无限集

在有限集和无限集中，有没有基数最大的集合?

定理 3-26： 对于任何集合 A，有 $\#A < \#(2^A)$

分析：若 A 是有限集，则结论显然成立。

故只考虑 A 是无限集的情况。

按无限集基数比较的定义，要证明两点：

① A 与 2^A 间存在一个内射函数

② A 与 2^A 间不存在任何双射函数

证：① 定义函数 $f = \{\{a\} \mid a \in A\}$

则 f 的值域是 2^A 的一个真子集，

即 f 是 A 到 2^A 的一个内射函数

$\therefore \#A \le \#(2^A)$

有关习题： 24

最大无限集

② 假设存在双射函数 $g: A \to 2^A$，则对于每一个 $a \in A$，其像是一个集合 $g(a) \in 2^A$

如果 $a \notin g(a)$，则称 a 为 A 的“外元素”，

如果 $a \in g(a)$，则称 a 为 A 的“内元素”

再设 B 是 A 中所有外元素的集合，自然有 $B \subseteq A$

显然，B 不为空

这是因为 $\varnothing \in 2^A$，而 g 是 A 到 2^A 的双射函数，

$\therefore$ 必有 $a \in A$ 使 $g(a) = \varnothing$

但 $a \notin \varnothing$，即 $a \in B$

由 $B \subseteq A$ 可知，必存在 $b \in A$，使 $g(b)= B$

这就只有两种情况：$b \in B$ 或者 $b \notin B$

若 $b \in B$，则 b 是"内元素"，与 B 的定义矛盾;

若 $b \notin B$，则 b 是"外元素"，就应该有 $b \in B$,
这又是矛盾的

$\therefore$ A 与 2^A 间不存在任何双射函数

$\therefore$ $\#A = \#(2^A)$不成立

$\therefore$ 只有 $\#A < \#(2^A)$

原命题成立

有关习题： 24

第三章结束

二，函数相等

函数相等：设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$C \to D$，如果 $A=B$ 和 $C=D$，并且对所有的 $a \in A$（或 $a \in C$）都有 f（a）$= g$（a），则称函数 f 和 g 是***相等***的，记为 $\boldsymbol{f=g}$

定义3-3：设有函数 f：$A \to B$ 和 g：$\tilde{A} \to B$，如果 $\tilde{A} \subseteq A$，且对于所有的 $a \in \tilde{A}$，有 g（a）$= f$（a），则称 g 是 f 在 $\tilde{A}$ 上的***限制***，并称 f 是 g 在 A 上的***扩充***。

例：由整数集 I 到自然数集合 N 的函数 f（i）$= |2i| + 1$ （$i \in I$）

而函数 g：$Z \to N$，g（z）$= 2z+1$，它是非负整数集到自然数集合的函数。

函数 g 就是函数 f 在非负整数集上的限制；函数 f 就是函数 g 在整数集上的扩充

说明：⑴ 所谓"限制"和"扩充"，实质是在更小或更大的定义域内讨论函数。

⑵ 定义域的范围改变了，值域包不变，甚至值域也不变，但函数可能发生本质的变化。

有关习题：4、5

例7：设 $A=\{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$，试证明任何从 A 到 A 的函数，如果它是内射，则它必是满射。反之亦真。

证明：设 $f: A \to B$ 是内射函数，$B = A$ 则有 $\#A = \#B$

设 f 的像的个数为 k

∵ f 是内射，没有两个像源共一个像的情况，像的个数等于像源的个数

即 $k = \#A = \#B$ (1)

如果 f 不是满射，则 B 中至少有一个元素没有像源

即像的个数小于 $\#B$，也就是 $k < \#B$

与 (1) 式 $k = \#B$ 矛盾

∴ f 是满射

反过来，若 f 是满射，即像的个数等于 $\#B$ $k=\#B=\#A$

假设 f 不是内射，则 A 上至少有两个元素共有一个像。

即像的个数小于像源的个数 $k < \#A$

与 $k=\#A$ 矛盾

∴ f 是内射

证毕

有关习题：**p113** 7@、8 @ 、9 @ 、10、11、12

§ 3.6 数学归纳法及其应用

“数学归纳法”是一种理论上非常严谨的证明方法。本节，数学归纳法主要有三个内容：

(1) 用数学归纳法证明一些有规律的结论；

(2) 用于定义函数；

(3) 用于定义集合

一，用数学归纳法证明有规律的结论（命题）

注意：数学归纳法的四个步骤，缺一不可，并且要按规范写出。

1.归纳基础： 当 n=1 时，结论是正确的。 必须要切实验证，不能只说一句“结论正确”。公式中的 n 全部要换成 1。

2.归纳假设：假设 n = k（k ∈N） 时，结论是正确的。这里，必须要用“假设”，不能用“当”；公式中的 n 全部要换成 k 。

3.归纳推导：当 n = k+1 时，推得结论也正确。 推导时一定要用到 n = k 时的结论。

4.归纳结论：则对任意 n ∈N 时，结论都是正确的

注意：归纳基础和归纳假设的各种形式，归纳基础并不都是 n=1 ；归纳假设也不都是“ n=k 时的情况”。参见 p95 例 4。

有关习题： 28@、31 @

二，用数学归纳法定义函数

用数学归纳法定义函数，只是在自然数集 N 或非负整数集 Z 上定义。即是说，函数的自变量是正整数或0，函数的值也是正整数或0。

例：裴波拉契(Fibonacci)函数 F_b：$Z \to Z$ 被定义为：

$$F_b(0)=0, \quad F_b(1)=1$$

$$F_b(n+1)=F_b(n)+F_b(n-1) \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

对于任何 $n \in N$ $(n \geq 2)$，函数值$F_b(n)$ 可依据上式归纳到计算$F_b(0)$ 和 $F_b(1)$。

例如，求 $F_b(4)$ 可以：

$$\begin{aligned} F_b(4) &= F_b(3)+F_b(2) \\ &= F_b(2)+F_b(1)+F_b(1)+F_b(0) \\ &= F_b(1)+F_b(0)+F_b(1)+F_b(1)+F_b(0) \\ &= 1+0+1+1+0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

依此法可求得前10个裴波拉契数为0，1，1，2，3，5，8，13，21，34

有关习题： 29 、30

注意：用归纳法定义函数有两个步骤：

1.指定函数自变量基本元素的相应函数值：定义域最前面的一个或几个元素的函数值是什么。

2.指定一组规则 (归纳公式)：这些规则规定如何通过自变量较小的函数值求得自变量较大的函数值。

上例在第一步中指定了最前面两个基本元素的函数值，在第二步中规定了如何利用前两个元素计算后一个元素的公式

归纳公式可能要求每一步都需要前面若干步骤的值才能计算。

有关习题：　29 、30

三，用数学归纳法定义集合

例 1：求下列定义所给出的集合：

(1) $3 \in S$

(2) 若 x、y $\in S$，则 $x+y \in S$

(3) 集合 S 是由有限次使用第一步和第二步而求得的元素所组成。

解：集合 S 是由 3 的的所有正整数倍所组成

注意：这里列出的是用归纳法定义集合的三个步骤：

1. 指定集合的基本元素；　　2.指定一组规则；　　3. 说明

题目对集合定义的要求实际上包含了两层意思：一是，函数的形式中有变量 n，对 $n \in N$ 要进行归纳证明；二是，对任意符合规定形式的两个函数的复合函数，也得归纳证明它属于定义的集合。

此题的第二步可以改写成：“若 $x \in S$，则 $x+3 \in S$”，结果是一样的。

有关习题：29 、30

理解：

1. 这种定义方法与以前的定义方法不同。

一般方法定义集合，主要是靠指定集合元素的存在范围，或者是直接指定范围，或者是给出条件，限定元素的所属范围；

用数学归纳法定义集合，不能预先指定集合元素的所属范围，而是给出一种推算法则，动态地产生集合的全部元素。

2. 在前面，元素个数有限的集合，可以用“列举法”表示；而元素个数无限的

集合只能用“描述法”表示。有些集合用描述法时，对元素的限制条件只能

使用自然语言，不利于机器处理。而数学归纳法定义集合，实质上是把自然语言叙述的规律数学化了，特别是归纳的定义很适合于计算机处理。

如下例

有关习题：28、29、30、31@

例2：由A_1，A_2，…，A_r（都是全集U的子集）产生的集合，可以归纳地定义如下：

⑴ $\varnothing$，U，A_1，A_2，…，A_r是由A_1，A_2，…，A_r产生的集合；

⑵ 如果S和T是由A_1，A_2，…，A_r产生的集合，
那么S'，$(S\cup T)$,$(S\cap T)$也是由A_1，A_2，…，A_r产生的集合
（在∩优先于∪的约定下，括号可以省略）

有关习题：28、29、30、31

可数集的证明：书上在证明定理 15 —— 22 的时候，主要用了两种方法：

(1) 构造无穷序列法：设法把无限集合排列成一个无穷序列。例如定理15、16、17、18、21、书 22 题

(2) 形成可数集的并集法：把被证的集合变成若干个（或可数个）可数集的并集，再根据上述的几个定理就可得出结论。例如，定理 19、20、22 例，书 23 题

三歧性定理:

对任意无限集 A、B，它们的基数之间的关系只可能有以下三种情况的一种成立，不可能有两种或三种情况同时成立。

(1) $\#A = \#B$ (2) $\#A < \#B$ (3) $\#A > \#B$

这个三歧性定理 对于有限集毫无意义，但对于无限集则很有意义。我们有如下定理

有关习题：22、23 @