第8章

8.1~8.7

第8章 Z变换与离散时间系统的Z域分析

本章主要内容：

1. 从拉普拉斯变换导出Z变换的过程;

2. Z变换的定义,收敛域的含义;

3. 典型序列的Z变换;

4. Z变换的主要性质及其证明方法;

5. 利用变换的性质和典型序列的Z变换求更多序列的Z变换;

6. 常用序列的Z变换表;

7. 用部分分式展开法求反Z变换;

8. 离散时间系统的系统函数及其与各个方面的互求关系;

9. 用Z变换解差分方程;

10. 系统函数的极点分布与系统特性的关系;

11. 离散时间系统的频率响应特性。

8.1 从拉普拉斯变换导出Z变换

在连续时间系统中，为了避开解微分方程的困难，可以通过拉氏变换把微分方程转换为代数方程。出于同样的目的，也可以通过一种称为z变换的数学工具，把差分方程转换为代数方程。

实际上，在时域（序域）解差分方程并不困难，特别是求零输入响应。但是，求零状态响应时，用z变换就要容易一些。有了z变换，更便于研究系统的性质。

对连续时间信号进行均匀冲激抽样后，就得到离散时间信号。设连续时间信号为f(t)，每隔时间T抽样一次，这相当于连续时间信号f(t)乘以冲激序列 $\delta_T(t)$。考虑到

冲激函数的抽样性质，抽样信号 $f_s(t)$ 可写为：

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT)$$

对上式取双边拉氏变换得：

$$F_d(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT)]e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[f(t)e^{-st}\delta(t - nT)]\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[f(nT)e^{-snT}\delta(t - nT)]\}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f(nT)e^{-snT}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t-nT)]dt\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f(nT)e^{-snT}\times 1\}$$

在上式中令， $e^{-sT}=z, f(nT)=f（n）$ **z 也是一复数，则得到**

$$F_d(s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f(n)z^{-n}\}\overset{def}{=}F_d(z)$$

这就从抽样信号 $f_s(t)$ **的双边拉氏变换，经过恒等变形导出了代表抽样信号 的序列 的双边Z变换,即**

$$F_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f(n)z^{-n}\} \qquad \textbf{（8.1-1）}$$

上式就是对序列 $f(n)$ 求双边Z变换的定义式。由于在实际问题中，遇到的大多是因果序列，因此在（**8.1-1**）式求号的下端是从**n=0**开始，这样一来，就引出了单边Z变换的定义，如下式所示。

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\{f(n)z^{-n}\} \qquad \textbf{（8.1-2）}$$

对序列 $f(n)$ 求双边Z变换，用符号 $\mathscr{Z}_{\mathbf{d}}$ 表示，于是有

$$\mathscr{Z}_{\mathbf{d}}[f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f(n)z^{-n}\} = F_d(z) \qquad \textbf{（8.1-3）}$$

也可以简记为 $f(n) \leftrightarrow F_d(z)$ （**8.1-4**）

而对序列 $f(n)$ 求单边Z变换，用符号 $\mathscr{Z}$ 表示，于是有

$$\mathscr{Z}\left[f(n)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{f(n)z^{-n}\right\} = F(z) \qquad \text{（8.1-5）}$$

也可以简记为 $f(n) \leftrightarrow F(z)$ （8.1-6）

对因果序列 $f(n)\varepsilon(n)$ 求双边Z变换，按定义求和有

$$\mathscr{Z}_{\mathrm{d}}\left[f(n)\varepsilon(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{f(n)\varepsilon(n)z^{-n}\right\} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{f(n)z^{-n}\right\} = F(z) \qquad \text{（8.1-7）}$$

由此可见，因果序列 $f(n)\varepsilon(n)$ 的双边Z变换等于原序列 $f(n)$ 的单边Z变换。在以后的讨论中，如无特别说明，求Z变换都是指求单边Z变换。

还要指出的是， s 和 z 都是复数，二者之间有下列关系：

$$z = e^{sT} \qquad \textbf{(8.1-9)}$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z \qquad \textbf{(8.1-10)}$$

复数 z 所在的平面称为 z 平面，复数 s 所在的平面称为 s 平面，都是复平面。上两式给出了两个复平面的映射关系。

8.2 典型序列的Z变换

现在按Z变换的定义来求几个典型序列的Z变换，注意求解过程中等号成立的条件。

8.2.1单位函数$\delta(n)$的Z变换

根据Z变换的定义有：

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(n)z^{-n}=\delta(0)+\delta(1)\,z^{-1}+\delta(2)z^{-2}+\ldots.$$

$$=1+0+0+\ldots.=1 \qquad \text{（8.2-1）}$$

在上式运算过程中，对复数Z在复平面的位置没有任何限制，因此（**8.2-1**）式在Z平面全平面成立，也可说全平面收敛。

（**8.2-1**）式也可简记为

$$\delta(n) \leftrightarrow 1 \quad \textbf{(全平面成立)} \qquad \textbf{（8.2-2）}$$

(8.2-2)式表明单位样值序列 $\delta(n)$和**Z**域函数 $F(z)=1$ 是一对**Z**变换。

8.2.2单位阶跃函数 $\varepsilon(n)$ 的Z变换

根据Z变换的定义有：

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon(n)z^{-n}=\varepsilon(0)+\varepsilon(1)z^{-1}+\varepsilon(2)z^{-2}+\ldots\ldots$$

$$=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\ldots$$

这是一个公比为 z^{-1} 的无穷等比级数列。当公比的模 $\left|z^{-1}\right|>1$ 时，此级数发散；当 $\left|z^{-1}\right|<1$ 时，此级数收敛。因此当 $\left|z^{-1}\right|<1$ ，即 $|z|>1$ 时有

$$F(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \qquad \text{（8.2-3）}$$

在上式运算过程中，对复数Z在复平面的位置的限制是 $|z| > 1$ ，因此（**8.2-3**）式在Z平面上是单位园外成立，也可说在Z平面的单位园外收敛。（**8.2-3**）式也可简记为:

$$\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad (8.2\text{-}4)$$

8.2.3指数函数 的Z变换

根据Z变换的定义有：

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}\varepsilon(n)z^{-n}$$

$$=a^{0}\varepsilon(0)+a^{1}\varepsilon(1)z^{-1}+^{2}\varepsilon(2)z^{-2}+\ldots\ldots+a^{n}\varepsilon(n)z^{-n}+\ldots\ldots$$

$$=a^{0}+a^{1}z^{-1}+a^{2}z^{-2}+\ldots\ldots+a^{n}z^{-n}+\ldots\ldots$$

这是一个公比为 az^{-1} 的无穷等比级数列。当公比的模 $\left|az^{-1}\right|>1$时，此级数发散；当 $\left|az^{-1}\right|<1$ 时，此级数收敛。因此当 $\left|az^{-1}\right|<1$ ，即 $|z|>|a|$ 时有

$$F(z)=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}\quad |z|>|a| \quad \textbf{（8.2-5）}$$

在上式运算过程中，对复数**Z**在复平面的位置的限制是 $|z| > |a|$ ，因此（**8.2-3**）式在**Z**平面上是在以原点为园心， $|a|$ 为半径的园之外部成立，也可说在**Z**平面的该园的外部收敛。（**8.2-5**）式也可简记为:

$$a^n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a| \qquad \text{（8.2-6）}$$

在上式中，分别令 $a = e^{\beta T}$ ，$a = e^{-\beta T}$ ，$a = e^{j\beta T}$ ，$a = e^{-j\beta T}$ ，则分别可得:

$$e^{\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{\beta T}} \qquad \text{（8.2-7）}$$

$$e^{-\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-\beta T}} \qquad \left(|z| > \left|e^{-\beta T}\right| \right) \qquad (8.2\text{-}8)$$

$$e^{j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{j\beta T}} \qquad \left(|z| > \left|e^{j\beta T}\right| = 1 \right) \qquad (8.2\text{-}9)$$

$$e^{-j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-j\beta T}} \qquad \left(|z| > \left|e^{-j\beta T}\right| = 1 \right) \qquad (8.2\text{-}10)$$

8.3 Z变换的收敛域

通过上节计算3个典型序列的单边Z变换的过程，可归纳总结出Z变换的收敛域如下。

定义：对于序列**f(n)**，使得**f(n)**的Z变换 $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n}$ 存在的z值范围称为Z变换的收敛域。

因为 $$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)z^{-n}$$

$$=f(0)z^{0}+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\ldots\ldots+f(n)z^{-n}+\ldots\ldots$$

是一个Z的负幂次的无穷级数，要该无穷级数的和式存在，必然要求

$$\left|f(n)z^{-1}\right|<1 \quad 即 \quad \left|f(n)\right|<\left|z\right| \qquad （8.3-1）$$

上式表明，序列f(n)的单边Z变换的收敛域，一定是以原点为园心的某个园的外部。而园的半径，则根据序列f(n)的不同情况而定。

单边Z变换的收敛域，可在Z平面上表示，如图8.3-1所示。

顺便指出，求序列f(n)的双边Z变换时，讨论其收敛域的情况则要复杂得多，要根据序列的不同情况，分别进行讨论。但是分析问题的基本方法和上述的方法是一样的。

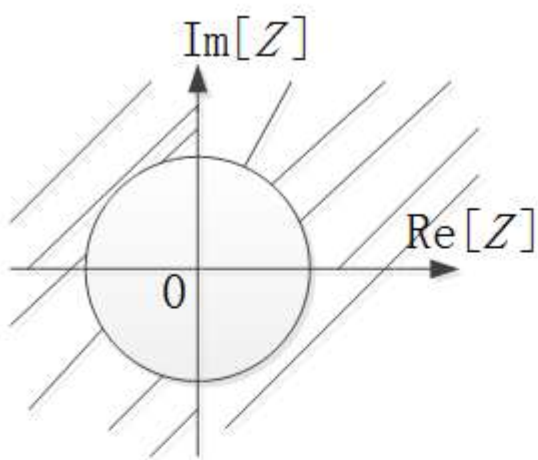

图8.3-1 单边Z变换的收敛域

当序列f(n)为双边序列时，其双边Z变换的计算可转换成两个单边Z变换来计算，如果这两个单边Z变换的收敛域都存在，且有公共的部分，则双边序列f(n)的双边Z变换一定是以原点为园心的同心圆环。

对于双边Z变换，还可能出现这样的情况，不同的序列在不同的收敛域条件下可能映射为同一个变换式。下面举例说明。

例8.3-1 若两序列分别为 $f_1(n) = a^n \varepsilon(n)$, 文件中找不到关系 ID 为 rId6 的图像部件。

试分别求其双边Z变换。

解：根据双边Z变换的定义式有：

$$F_{1d}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \varepsilon(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

利用8.2.3节的结果可得：

$$F_{1d}(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a| \qquad \textbf{（8.3-1）}$$

【比较（8.3-1）和（8.2-5）两式的结果可知，因果序列的单边Z变换和其单双边Z变换相等，且收敛域也相同。】

同样，根据双边Z变换的定义式有：

$$F_{2d}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_2(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} - a^n \varepsilon(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} - a^n z^{-n}$$

$$= \ldots\ldots + (-a^{-3} z^{3}) + (-a^{-2} z^{2}) + (-a^{-1} z)$$

$$= -[\ldots + a^{-3}z^{3} + a^{-2}z^{2} + a^{-1}z]$$

上式方括号内可看成一个首项为 $a^{-1}z$ ，公比也为 $a^{-1}z$ 的无穷等比级数，当 $|a^{-1}z| < 1$ 时，即 $|z| < |a|$ 级数收敛，且有：

$$F_{2d}(z) = -\frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = -\frac{z}{a - z} = \frac{z}{z - a} \quad (|z| < |a|) \qquad \text{（8.3-2）}$$

【比较（8.3-1）和（8.3-2）两式的结果可知，不同的两个序列 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 在不同的收敛域条件下，其双边Z变换映射为同一个变换式 $F_{1d}(z) = F_{2d}(z) = \frac{a}{z - a}$ 。这里，$f_1(n) = a^n\varepsilon(n)$ 称为因果序列，而 文件中找不到关系 ID 为 rId25 的图像部件。 称为反因果序列，反因果序列是无始有终的序列。】

例8.3-2 求序列 $f(n) = a^n\varepsilon(n) - b^n\varepsilon(-n-1)$ 的双边Z变换。

解：根据双边Z变换的定义式有：

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n\varepsilon(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -b^n\varepsilon(-n-1)z^{-n}$$

利用例8.3-1的计算结果，可分别求得上述的两和式为：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n\varepsilon(n)z^{-n} = \frac{z}{z-a} \qquad (|z| > |a|)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -b^n\varepsilon(-n-1)z^{-n} = \frac{z}{z-b} \qquad (|z| < |b|)$$

如果 $|b| > |a|$ ，则两和式有公共的收敛域 $|a| < |z| < |b|$ ，序列的双边Z变换存在，且

$$F(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)} \qquad (|a| < |z| < |b|)$$

双边Z变换的收敛域可在Z平面上表示，如图8.3-2所示。

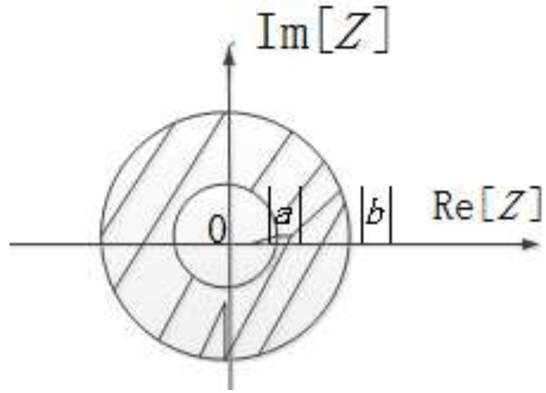

图8.3-2 双边Z变换的收敛域

如果 $|b| < |a|$ 则两和式没有公共的收敛域，则序列的双边Z变换不存在。

8.4 Z变换的基本性质

根据Z变换的的定义，可导出Z变换的若干基本性质。这些性质反映了序域（时域）和Z域的内在联系与对应关系。利用Z变换的基本性质和典型序列的Z变换可方便地求得一些较复杂的序列的Z变换。利用Z变换的位移性质，可以将差分方程变换成Z域的代数方程。因为系统的单位样值响应和系统函数是一对Z变换,故可以通过系统函数来研究系统的性质。

8.4.1 线性性质

线性性质包括齐次性与叠加性。

若 $f_1(n) \leftrightarrow F_1(z)$，$f_2(n) \leftrightarrow F_2(z)$， **a，b**为常数，

则 $af_1(n) + bf_2(n) \leftrightarrow aF_1(z) + bF_2(z)$ （**8.4-1**）

此性质根据定义即可证明，这个工作由读者自己完成。

例**8.4-1**求单边正弦序列 $\sin(\beta nT)\varepsilon(n)$ 及单边余弦序列 $\cos(\beta nT)\varepsilon(n)$ 的**Z**变换。

解：前面已经证明，因果序列的单边**Z**变换和双边**Z**变换相等，故问题中求**Z**变换，可用求单边**Z**变换即可。因此，解题过程中也可省却 不写。

因为 $\sin(\beta nT) = \frac{1}{2j}[e^{j\beta nT} - e^{-j\beta nT}]$

由（8.2-9）式 $e^{j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{j\beta T}} \quad (|z| > |e^{j\beta T}| = 1)$

及（8.2-10）式 $e^{-j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-j\beta T}} \quad (|z| > |e^{-j\beta T}| = 1)$

再根据线性性质得

$$\mathscr{Z}[\sin(\beta nT)] = \frac{1}{2j}\mathscr{Z}[e^{j\beta nT} - e^{-j\beta nT}] \quad (|z| > 1)$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - e^{j\beta T}} - \frac{z}{z - e^{-j\beta T}}\right] = \frac{z\sin(\beta T)}{z^2 - 2z\cos(\beta T) + 1}$$

简记为 $$\sin(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z\sin(\beta T)}{z^2 - 2z\cos(\beta T) + 1} \quad (|z| > 1)$$

(8.4-2)

用同样的方法可求得

$$\mathscr{Z}\left[\cos(\beta nT)\right]=\frac{z^2-z\cos(\beta T)}{z^2-2z\cos(\beta T)+1}\qquad(|z|>1)$$

简记为 $\cos(\beta Tn)\varepsilon(n)\leftrightarrow\dfrac{z^2-z\cos(\beta T)}{z^2-2z\cos(\beta T)+1}\ (|z|>1)$（**8.4-3**）

例8.4-2 求序列 $f(n)=a^n\varepsilon(n)-a^n\varepsilon(n-1)$

的Z变换。

解：根据线性性质，$F(z)=F_1(z)-F_2(z)$

上式中，由（8.2-6）式知：

$$a^n\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}\qquad(|z|>|a|)\qquad\textbf{(8.2-6)}$$

即 $$F_1(z)=\frac{z}{z-a} \qquad (|z|>|a|)$$

而 $$F_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\varepsilon(n-1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{+\infty} a^n z^{-n}$$

$$=a^1\varepsilon(1)z^{-1}+a^2\varepsilon(2)z^{-2}+\ldots.+a^n\varepsilon(n)z^{-n}+\ldots.$$

$$=a^1z^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots.+a^nz^{-n}+\ldots.$$

这是一个首项为 az^{-1}，公比为 az^{-1} 的无穷等比级数列。当公比的模 $|az^{-1}|>1$ 时，此级数发散；当 $|az^{-1}|<1$ 时，此级数收敛。因此当 $|az^{-1}|<1$，即 $|z|>|a|$ 时有

$$F_2(z)=az^{-1}+a^2z^{-2}+\ldots.=\frac{az^{-1}}{1-az^{-1}}=\frac{a}{z-a} \quad (|z|>|a|) \qquad \textbf{(8.4-5)}$$

将（8.4-4）与（8.4-5）式代入（1）式得：

$$F(z) = F_1(z) - F_2(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{a}{z-a} = 1 \quad (|z| > |a|) \qquad \textbf{（8.4-6）}$$

解毕。

解法2：先将序列在时域化简，有：

$$f(n) = a^n\varepsilon(n) - a^n\varepsilon(n-1) = a^n[\varepsilon(n) - \varepsilon(n-1)]$$

$$= a^n[\delta(n)] = a^0[\delta(n)] = \delta(n)$$

所以 $F(z) = \mathscr{Z}[f(n)] = \mathscr{Z}[\delta(n)] = 1$ （全平面收敛）

解毕。

【讲评：比较两种解法，可见第2种解法简单得多。还要指出的是，两种解法得到的收敛域是不一样的，这是因为收敛域和求解过程有关，也即和路径有关。】

8.4.2序列的指数加权与Z域尺度变换特性

若 $$F(z)=\mathscr{Z}[f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}\quad(|z|>R)$$

则 $$\mathscr{Z}[a^n f(n)]=F(\frac{z}{a})\quad(\left|\frac{z}{a}\right|>R)$$

证明：$$\mathscr{Z}[a^n f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}[a^n f(n)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)(\frac{z}{a})^{-n}=F(\frac{z}{a})$$ 得证。

该性质的含义是，序列乘以 a^n ，即序列的指数加权，导致的结果是Z域平面尺度（收敛域）的压缩或扩展，当 $|a|>1$ 时，收敛域压缩，当 $|a|<1$ 时，收敛域扩展。

特别地， 当 $a=-1$ 时，$\mathscr{Z}[(-1)^n f(n)]=F(-z)$；

以及 $\mathscr{Z}[(-1)^n\varepsilon(n)]=\dfrac{-z}{-z-1}=\dfrac{z}{z+1}\quad(|z|>1)$ （8.4-7）

例8.4-3 根据 $\sin(\beta Tn)\varepsilon(n)\leftrightarrow\dfrac{z\sin(\beta T)}{z^2-2z\cos(\beta T)+1}$ （$|z|>1$） (8.4-2)

由序列的指数加权与Z域尺度变换特性立即可得

$$e^{aTn}\sin(\beta Tn)\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{\dfrac{z}{e^{aT}}\sin(\beta T)}{(\dfrac{z}{e^{aT}})^2-2(\dfrac{z}{e^{aT}})\cos(\beta T)+1}\quad(|z|>|a|)$$

化简后为：

$$e^{aTn}\sin(\beta Tn)\varepsilon(n)\leftrightarrow\frac{ze^{aT}\sin(\beta T)}{z^2-2ze^{aT}\cos(\beta T)+e^{2aT}}\quad(|z|>|a|)$$

（8.4-8）

根据

$$\cos(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2 - z\cos(\beta T)}{z^2 - 2z\cos(\beta T) + 1}$$

$(|z| > 1)$ **(8.4-3)**

可得

$$e^{aTn}\cos(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2 - ze^{aT}\cos(\beta T)}{z^2 - 2ze^{aT}\cos(\beta T) + e^{2aT}}$$

$(|z| > |a|)$ **(8.4-9)**

8.4.3序列的线性加权（时域乘n）和z域微分

若 $F(z) = \mathscr{Z}[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \qquad (|z| > R)$

则 $\mathscr{Z}[nf(n)] = -z \dfrac{dF(z)}{dz} \qquad (|z| > R)$

证明：由已知 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$

上式对z求导得 $\dfrac{dF(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \dfrac{d(z^{-n})}{dz}$

即有 $\dfrac{dF(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} - nf(n) z^{-n-1}$

上式两边同时乘以－z后，得 $-z \dfrac{dF(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{+\infty} [nf(n)] z^{-n}$

此式的含义即 $\mathscr{Z}[nf(n)] = -z \dfrac{dF(z)}{dz}$ 得证。

例8.4-4 已知 $F(z) = \mathscr{Z}[\varepsilon(n)] = \dfrac{z}{z-1}$

求 $\mathscr{Z}[n\varepsilon(n)]$

解： 由已知，再根据序列的线性加权性质得

$$\mathscr{Z}[n\varepsilon(n)] = -z\frac{d}{dz}[\frac{z}{z-1}] = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \textbf{（8.4-10）}$$ 解毕。

对（8.4-10）式再用一次序列的线性加权性质得

$$\mathscr{Z}[n^2\varepsilon(n)] = -z\frac{d}{dz}[\frac{z}{(z-1)^2}]$$

$$= -z\frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad \textbf{（8.4-11）}$$

8.4.4移位性质

移位性质对不同的情况，有不同的结论。这里，只考虑单边 Z变换移位性质的4种情况。

（1）双边序列左移：设 $f(n)$ 是双边序列，已知其单边 变换 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ ，则其左移序列 $f(n+k)$ 的单边 变换

$$Z[f(n+k)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)\cdot z^{-n}=z^{k}\left[F(z)-\sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)\cdot z^{-n}\right] \qquad \textbf{（8.4-12）}$$

证明：根据单边Z变换的定义，有：

$$\mathscr{Z}[f(n+k)]=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n+k) z^{-n}=z^{k}\sum_{n=0}^{+\infty} f(n+k) z^{-(n+k)}$$

作变量置换，令 $m = n + k$ ，

则 原式 $= z^{k}\sum_{m=k}^{+\infty} f(m)z^{-m} = z^{k}[\sum_{m=0}^{+\infty} f(m)z^{-m} - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)z^{-m}]$

$$= z^{k}[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(n)z^{-n}]$$

得证。

当 **n=1**时，$Z[f(n+1)] = zF(z) - zf(0)$

当**n=2** 时，$Z[f(n+2)] = z^{2}F(z) - z^{2}f(0) - zf(1)$

是常用的两个公式。

用 **Z**变换解前向差分方程时，要用到这个性质。

（2）双边序列右移，设 $f(n)$ 是双边序列，已知其单边Z 变换 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot z^{-n}$ ，则其右移序列 $f(n-k)$ 的单边 变换

$$Z[f(n-k)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)\cdot z^{-n}=z^{-k}\left[F(z)+\sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)\cdot z^{-n}\right]$$

证明：根据单边Z变换的定义，有：

$$\mathscr{Z}\{f(n-k)]=\sum_{n=0}^{+\infty} f(n-k)z^{-n}$$

对上式作变量置换，令 $m=n-k$ ，则n=0 时，m=-k，n=∞，m=∞，且n=m+k，将上述结果代入上式得

$$\mathscr{Z}\{f(n-k)]=\sum_{m=-k}^{+\infty} f(m)z^{-(m+k)}=z^{-k}[\sum_{m=-k}^{+\infty} f(m)z^{-m}]$$

$$= z^{-k}[\sum_{m=-k}^{-1} f(m)z^{-m} + \sum_{m=0}^{+\infty} f(m)z^{-m}] = z^{-k}[F(z) + \sum_{m=-k}^{-1} f(m)z^{-m}]$$

得证。

当 k=1时， $Z[f(n-1)] = z^{-1}F(z) + f(-1)$

当k=2 时， $Z[f(n-2)] = z^{-2}F(z) + z^{-1}f(-1) + f(-2)$

用 Z变换解后向差分方程时，需要用到这个性质。

（3）因果序列右移，因果序列的一般表示法是 $f(n)\cdot\varepsilon(n)$

已知因果序列 $f(n)\cdot\varepsilon(n)$ 的 Z变换为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\cdot\varepsilon(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\cdot z^{-n}$$

则其右移序列 的单边 变换：

$$Z[f(n-k)\varepsilon(n-k)]=\sum_{n=0}^{\infty}f(n-k)\cdot\varepsilon(n-k)\cdot z^{-n}=z^{-k}F(z)$$

证明方法同样是根据已知和定义，并作变量置换 。

（4）因果序列左移：已知因果序列 $f(n)\cdot\varepsilon(n)$ 的 Z变换为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot\varepsilon(n)\cdot z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\cdot z^{-n}$$

则其左移序列 $F(n+k)\varepsilon(n+k)$ 的单边 Z变换

$$Z[f(n+k)\varepsilon(n+k)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)\cdot\varepsilon(n+k)\cdot z^{-n}$$

$$=z^{k}[F(z)-\sum_{n=0}^{k-1} f(n)\bullet z^{-n}]$$

这种情况的证明方法和结论同双边序列左移是一样的。

例8.4-5 求周期为N的因果周期性单位样值

序列 $\delta_N(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(n - mN)$的Z变换。

解：画出 $\delta_N(n)$ 的波形如图8.4-1所示。

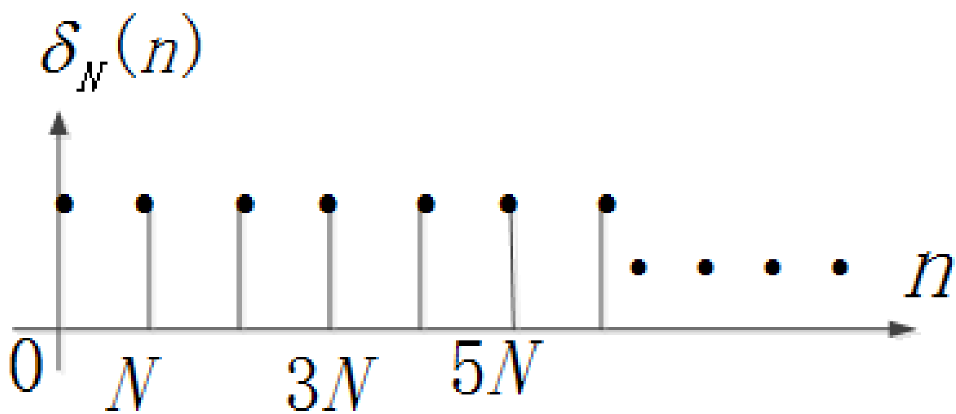

图8.4-1 因果周期性单位样值序列的波形

因为 $\delta_N(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \delta(n - mN) = \delta(n) + \delta(n - N) + \delta(n - 2N) + \ldots\ldots$

根据 $\mathscr{Z}[\delta(n)]=1$ 及移位特性，求得 $\delta(n)$ 的各右移序列的Z变换为： $\mathscr{Z}[\delta(n-mN)]=z^{-mN}$

于是，周期为N的因果周期性单位样值序列的Z变换为：

$$\mathscr{Z}[\sum_{m=0}^{+\infty}\delta(n-mN)]=1+z^{-N}+z^{-2N}\ldots\ldots$$

这是一个首项为1，公比为 z^{-N} 的无穷等比级数列。当公比的模 $\left|z^{-N}\right|>1$ 时，此级数发散； 当 $\left|z^{-N}\right|<1$ 时，此级数收敛。因此当 $\left|z^{-N}\right|<1$ 时有：

$$\mathscr{Z}[\delta(n-mN)]=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^{N}}{z^{n}-1}\quad(|z|>1)\qquad \textbf{（8.4-14）}$$

因果周期性单位样值序列Z变换的收敛域由 $\left|z^{-N}\right|<1$ 决定，即 $\left|z^{N}\right|>1$，也即 $|z|>1$ 故其收敛域为单位园外。

8.4.5 时域卷积定理

若 $$\mathscr{Z}[f_1(n)] = F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n) z^{-n}$$

$$\mathscr{Z}[f_2(n)] = F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n) z^{-n}$$

则 $$\mathscr{Z}[f_1(n) * f_2(n)] = F_1(z) F_2(z)$$

证明：$$\mathscr{Z}[f_1(n) * f_2(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} [f_1(n) * f_2(n)] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_1(j) f_2(n-j)] z^{-n} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_1(j) [\sum_{n=0}^{+\infty} f_2(n-j) z^{-n}]$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [f_1(j)] z^{-j} F_2(z) = F_1(z) F_2(z)$$ 得证。

Z变换除了以上重要性质之外，还有初值定理、终值定理、以及Z域卷积定理等性质，因为使用较少，故不再讨论。

例8.4-6 已知系统单位样值响应的Z变换 $\mathscr{Z}[h(n)] = H(z)$**，和激励 的Z变换**$\mathscr{Z}[e(n)] = E(z)$ **，求系统零状态响应的Z变换。**

解：因为系统零状态响应： $y_{zs}(n) = e(n) * h(n)$

对上式两边取Z变换有：

$\mathscr{Z}[y_{zs}(n)] = \mathscr{Z}[h(n) * e(n)]$

由卷积定理可得

$$\mathscr{Z}[y_{zs}(n)] = Y_{zs}(z) = H(z)E(z)$$

上式表明，系统零状态响应的Z变换等于系统单位样值响应的Z变换与激励的Z变换之乘积。

8.5 反Z变换

如例8.4-6所示，若知道系统单位样值响应的Z变换与激励的Z变换之乘积，就可通过求反Z变换来求系统的零状态响应。从理论上来说，求反Z变换的方法有三种：幂级数展开法（又称长除法），部分分式展开法和围线积分法（又称留数法）。但常用的是部分分式展开法，下面就来讨论这个问题。

一般情况下，序列 $f(n)$ Z变换的函数式是一个有理分式，如（8.5-1）式所示。

$$F(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots\ldots+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots\ldots+a_0} \qquad (8.5\text{-}1)$$

因为 $a^n\varepsilon(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$，为了在进行部分分式分解后得到形如 $\dfrac{z}{z-a}$ 的基本有理分式，通常是先将 $\dfrac{F(z)}{z}$ 进行展开，然后得到 $F(z)$ 的展开式。这一步是反**Z**变换进行部分分式展开的特点。可根据有理分式 $F(z)$ 极点的不同情况，分别讨论如下。

部分分式展开法，实际是以查常用**Z**变换表为基础的，因此在讨论部分分式展开法之前，清理一下常用的**Z**变换对是必要的。

8.5.1常用序列的Z变换对

1） $\delta(n) \leftrightarrow 1$ 2） $\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$

3） $a^n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$ 4） $\delta(n-1) \leftrightarrow z^{-1}$

$$n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{Z}{(z-1)^2} \qquad na^n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$e^{\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{Z}{Z-e^{\beta T}} \qquad e^{-\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{Z}{Z-e^{-\beta T}}$$

$$e^{j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{Z}{Z-e^{j\beta T}} \qquad e^{-j\beta Tn}\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{Z}{Z-e^{-j\beta T}}$$

11） $\sin(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \dfrac{z\sin(\beta T)}{z^2 - 2z\cos(\beta T) + 1}$

12） $\cos(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \dfrac{z^2 - z\cos(\beta T)}{z^2 - 2z\cos(\beta T) + 1}$

13） $e^{atn}\sin(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \dfrac{ze^{aT}\sin(\beta T)}{z^2 - 2ze^{aT}\cos(\beta T) + e^{2aT}}$

14）

$e^{aTn}\cos(\beta Tn)\varepsilon(n) \leftrightarrow \dfrac{z^2 - ze^{aT}\cos(\beta T)}{z^2 - 2ze^{aT}\cos(\beta T) + e^{2aT}}$

15） $n^2\varepsilon(n) \leftrightarrow \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

8.5.2 F(z)只含单阶极点

先通过例子来说明方法和步骤。

例8.5-1 已知 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$ $(|z|>2)$ 求$f(n)$。

解： 令 $$Q(z)=\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{B_1}{z+1}+\frac{B_2}{z-2} \qquad (1)$$

则 $$B_1=Q(z)(z+1)\Big|_{z=-1}=\frac{z}{z-2}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{3}$$

$$B_2=Q(z)(z-2)\Big|_{z=2}=\frac{z}{z+1}\Big|_{z=2}=\frac{2}{3}$$

代回（1）式，得 $$F(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z-2}$$

对上式取反变换，查表得

$$f(n)=[\frac{1}{3}(-1)^{n}+\frac{2}{3}(2)^{n}]\varepsilon(n)$$ 解毕。

8.5.3 F(z)含有重极点

例8.5-2 已知 $F(z)=\dfrac{z^{3}+z^{2}}{(z-1)^{3}}\quad(|z|>1)$

求：$f(n)$

解；令 $Q(z)=\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{z^{2}+z}{(z-1)^{3}}$

$$=\frac{B_{3}}{(z-1)^{3}}+\frac{B_{2}}{(B-1)^{2}}+\frac{B_{1}}{z-1}$$ （1）

这里，$z = 1$是$F(z)$的三重极点，由数学可知，$Q(z)$的展开式只能具有（1）式那样的形式。（1）式是一个恒等式，即z可取任何值，只要不使分母为零，等式均成立。可利用这一性质来求出（1）式中的待定系数B_1，,B_2,，B_3.。

为了书写简洁，设

$$Q_1(z) = Q(z)(z-1)^3 = (z^2 + z)$$

由（1）式可得： $B_3 = Q(z)(z-1)^3\Big|_{z=1} = (z^2 + z)\Big|_{z=1} = 2$

为了求得B_2，将（1）式两边同乘以 $(z-1)^3$ ，得：

$$Q_1(z) = B_3 + B_2(z-1) + B_1(z-1)^2 \qquad \text{（2）}$$

对（2）式两边求导一次后，令Z=1即可求得B_2。

对（2）式两边求导得：

$$\frac{dQ_1(z)}{dz} = 2z + 1 = B_2 + 2B_1(z-1) \qquad （3）$$

在（3）式中令Z=1即可求得B_2，即有B_2=3。

对（3）式两边再求导一次得 $2 = 2B_1$ ，于是B_1=1。将所求得的B_1，,$B_{2,}$，B_3.之值代回（1）式得：

$$F(z) = \frac{2z}{(z-1)^3} + \frac{3z}{(B-1)^2} + \frac{z}{z-1}$$

查表，结合运算可得反变换：

$$f(n) = (n^2 - n)\varepsilon(n) + 3n\varepsilon(n) + \varepsilon(n) = (n+1)^2\varepsilon(n)$$

解毕。

8.5.4 F(z)含有一对共轭积点

对**F(z)**含有一对共轭积点的情况，开始可按单积点的情况处理，待求出指数形式的解以后，必须运用欧拉公式将一对指数形式的解化成正弦余弦序列。

例**8.5-3** 已知序列 $f(n)$ 的单边 变换

$$F(z)=\frac{z^2+z}{(z-1)(z^2-z+1)}$$ ，$|z|>1$， 求 $f(n)$ 。

解：令 $Q(z)=\dfrac{F(z)}{z}$，得 $$Q(z)=\frac{z+1}{(z-1)[z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)][z-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)]}$$

将 $Q(z)$ 进行部分分式展开,得:

$$Q(z)=\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)}+\frac{-1}{z-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$$

所以 $$F(z)=Q(z)\bullet z=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)}+\frac{-z}{z-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)}$$

根据**z**变换的基本公式**,**可知

$$f(n)=2-\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\right)^n+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)^n\right](n\geq 0) \qquad (1)$$

讲评**:**到这一步**,**解题并没有结束，还应该将**(1)**式中方括号内的两个指数项序列利用欧拉公式进一步化简成正弦或余弦序列。下面继续解下去。

续解： $\because (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)^n=(e^{j\frac{\pi}{3}})^n=e^{j\frac{\pi}{3}n}$

及 $(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^n=(e^{-j\frac{\pi}{3}})^n=e^{-j\frac{\pi}{3}n}$

$$\therefore\left[(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j)^n+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j)^n\right]=(e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n})=2con(\frac{\pi}{3}n) \qquad （2）$$

将（2）式代入（1）式即得

$$f(n)=\left[2-2con(\frac{\pi}{3}n)\right]\varepsilon(n)=2\left[1-con(\frac{\pi}{3}n)\right]\varepsilon(n)$$

解毕。

8.6离散时间系统的系统函数

同连续时间系统类似，离散时间系统也有系统函数。离散时间系统的系统函数只取决于系统的结构和元件参数，因此它从Z域反映了系统的性质。

8.6.1系统函数的定义

因为系统的零状态响应： $y_{zs}(n) = e(n) * h(n)$

对上式两边取Z变换有 $\mathscr{Z}[y_{zs}(n)] = \mathscr{Z}[h(n) * e(n)]$

由卷积定理可得

$$\mathscr{Z}[y_{zs}(n)] = Y_{zs}(z) = H(z)E(z) \qquad (8.6\text{-}1)$$

上式中 $H(z) = \mathscr{Z}[h(n)]$ $E(z) = \mathscr{Z}[E(n)]$

由（**8.6-1**）式得：

$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{E(z)} \qquad \text{（8.6-2）}$$

（**8.6-2**）式就是系统函数 $H(z)$ 的定义式。上式表明，系统函数 $H(z)$ 等于系统零状态响应的**Z**变换与激励的**Z**变换之比。因此，可以根据定义式来求系统函数。

而（**8.6-1**）式则表明，系统零状态响应的**Z**变换等于系统单位样值响应的**Z**变换与激励的**Z**变换之乘积。可以对（**8.6-1**）式两边取反**Z**变换来求系统的零状态响应。

8.6.2系统函数 与转移算子式 的关系

除了可以根据定义式来求系统函数之外，还可以通过系统方程，进而通过转移算子式 来获取系统函数。下面以二阶后向差分方程为例，来证明 $H(z)=H(E)|_{E=z}$ 。

设二阶后向差分方程为：

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2) \quad \textbf{（8.6-2）}$$

用移序算子E表示差分方程，则有：

$$y(n)+a_1E^{-1}y(n)+a_2E^{-2}y(n)=b_0x(n)+b_1E^{-1}x(n)+b_2E^{-2}x(n)$$

提公因式后 $\left(1+a_1E^{-1}+a_2E^{-2}\right)y(n)=(b_0+b_1E^{-1}+b_2E^{-2})x(n)$

所以 $$y(n)=\frac{b_0+b_1E^{-1}+b_2E^{-2}}{1+a_1E^{-1}+a_2E^{-2}}x(n)=\frac{b_0E^2+b_1E+b_2}{E^2+a_1E+a_2}x(n)$$

由此可知：

$$H(E)=\frac{b_0E^2+b_1E+b_2}{E^2+a_1E+a_2} \qquad （8.6-3）$$

求系统函数 $H(z)$ 时，可对（8.6-2）式在因果激励，零状态条件下取z变换，根据双边序列单边z变换的右移性质，及因果系统的因果性，知 $x(-1),x(-2),y(-1),y(-2)$ 等均为零值，所以有：

$$y_{zs}(z)+a_1z^{-1}y_{zs}(z)+a_2z^{-2}y_{zs}(z)=b_0x(z)+b_1z^{-1}x(z)+b_zz^{-2}x(z)$$

解之得 $$H(z)=\frac{y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2} \qquad （8.6-4）$$

比较（8.6-3）、（8.6-4）两式，可知 $H(z)=H(E)|_{E=z}$ 成立。

对于高阶情形，证明方法是一样的，关系式依然成立。

对于前向二阶差分方程，同样可以证明上述关系式成立。只是由于求系统函数 $H(z)$ 时，涉及到的初时条件 $y_{zs}(0)$ 、$y_{zs}(1)$、$y_{zs}(2)$并不为零，要消去它，进行的运算过程要复杂一些。

系统函数 和离散时间系统各方面的互求关系如图**8.6-1**所示。

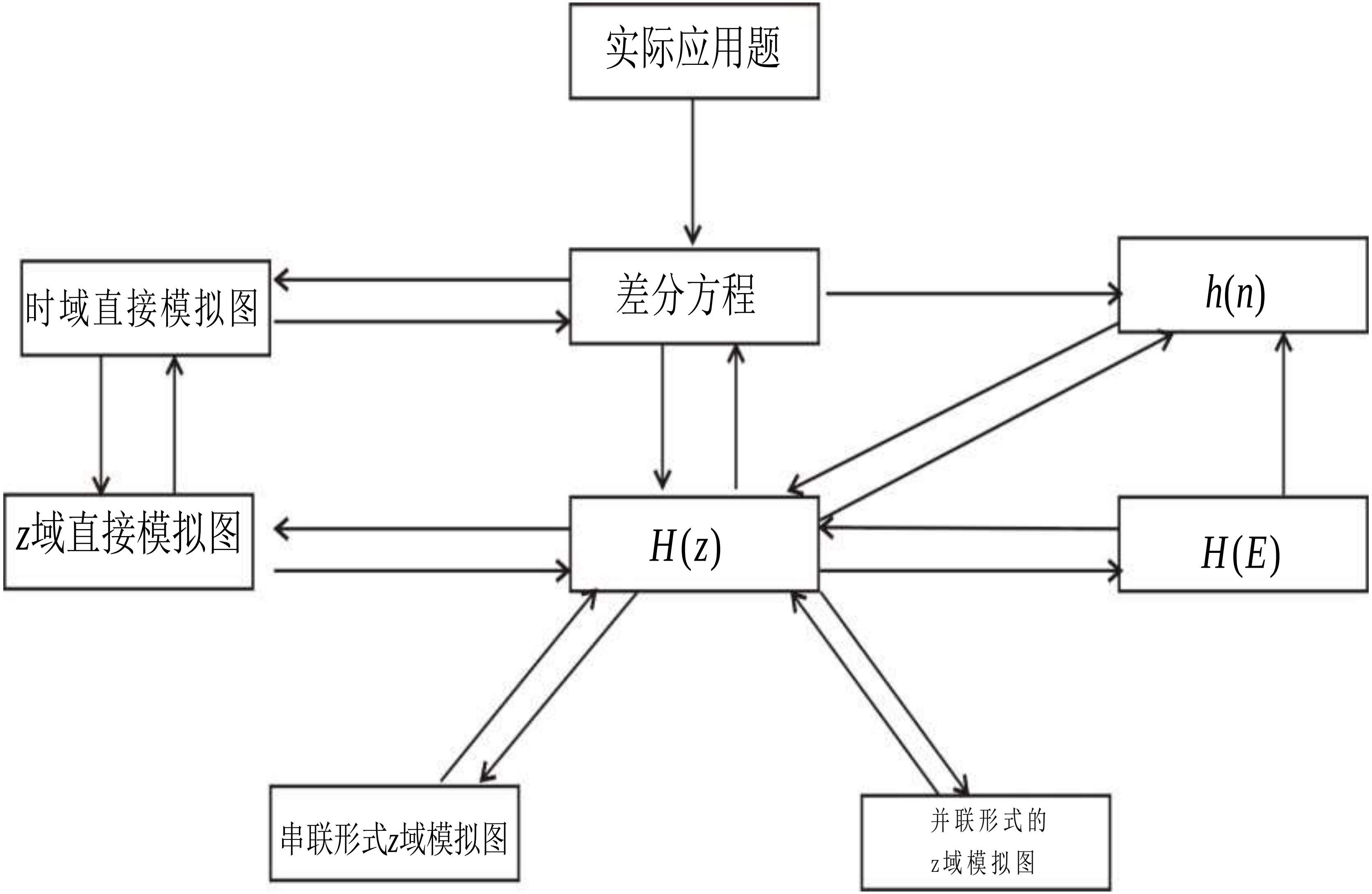

图8.6-1　系统函数 和各方面的互求关系图

例**8.6-1** 已知系统的单位样值响应 $h(n)=0.7(0.4)^n\varepsilon(n)$，作系统的直接模拟图。

解：因为 $H(z)=Z\left[h(n)\right]=\dfrac{0.7z}{z-0.4}$,

故 $H(E)=H(z)\big|_{z=E}=\dfrac{0.7E}{E-0.4}$ ，又 $y(n)=H(E)\bullet e(n)=\dfrac{0.7E}{E-0.4}e(n)$

所以 $(E-0.4)y(n)=0.7Ee(n)$

即系统方程为： $y(n+1)-0.4y(n)=0.7e(n+1)$

作辅助函数 $q(n)$ ，令 $q(n+1)-0.4q(n)=e(n)$ ， 将此式代入 $y(n)$ 的算子表达式，可得 $y(n)=0.7q(n+1)$ ，根据两式先后作图即可得系统的直接模拟图如图**8.6-2**所示。

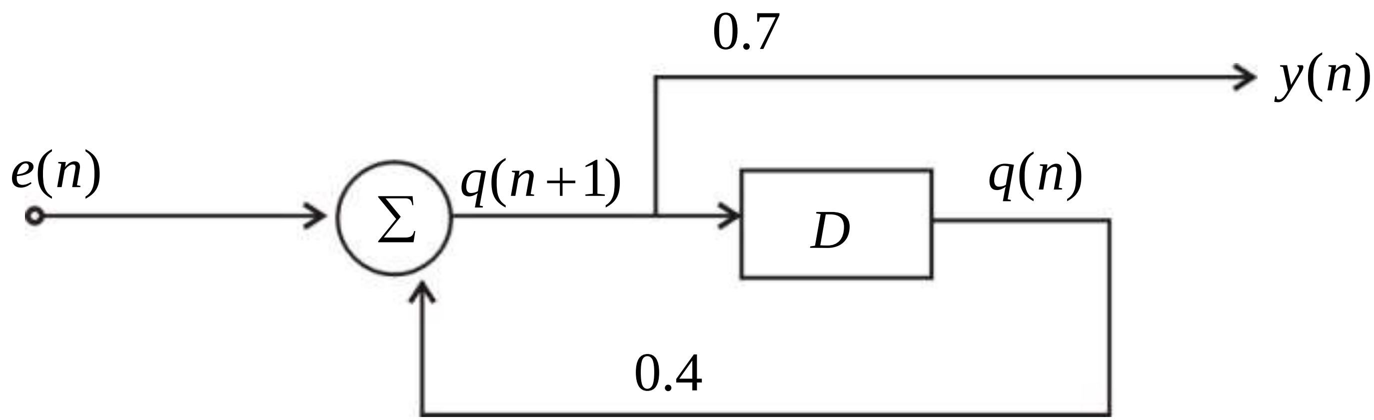

图8.6-2 例8.6-1所求的直接模拟图

【讲评：此题的解题路径是由已知的$h(n) \longrightarrow H(z) \longrightarrow H(E) \longrightarrow$系统的差分方程 $\longrightarrow$ 判断是何种情况 $\longrightarrow$ 作辅助函数 $\longrightarrow$ 两个简单情形差分方程 $\longrightarrow$ 作图。

为什么令 $q(n+1)-0.4q(n)=e(n)$ 就可得到 $y(n)=0.7q(n+1)$ 呢？这是因为已经有

$$y(n)=H(E)\bullet e(n)=\frac{0.7E}{E-0.4}e(n) \qquad （1）$$

在（1）式中令 $q(n)=\dfrac{1}{E-0.4}e(n)$ （2）

将（2）式代入（1）式，得 $y(n)=0.7Eq(n)=0.7q(n+1)$（3）

再将（2）式改写，即为：$q(n+1)-0.4q(n)=e(n)$（4）

由这个过程可以看出，辅助函数的引入是正确的和必要的。】

例8.6-2已知系统的差分方程为：$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=e(n)$

求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

解：用移序算子表示差分方程后，进行如下运算：

$$y(n)-E^{-1}y(n)-2E^{-2}y(n)=e(n)$$

$$(1-E^{-1}-2E^{-1})y(n)=e(n)$$

$$y(n)=\frac{1}{1-E^{-1}-2E^{-2}}e(n)$$

$$H(E)=\frac{1}{1-E^{-1}-2E^{-2}}=\frac{E^2}{E^2-E-2}$$

$$H(z)=H(E)\big|_{E=z}=\frac{z^2}{z^2-z-2}$$

令 $$Q(z)=\frac{H(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z+1)}=\frac{B_1}{z-2}+\frac{B_2}{z+1}$$

求得 $B_1=\frac{2}{3}$ $B_2=\frac{1}{3}$

所以 $$H(z)=\frac{2z/3}{z-2}+\frac{z/3}{z+1}$$

对上式求反变换即，查表得

$$h(n)=\left[\frac{2}{3}(2)^n+\frac{1}{3}(-1)^n\right]\varepsilon(n)$$ 解毕。

8.6.3系统函数 的极点与系统的稳定性

在“7.6.3 离散时间系统的因果性与稳定性”一节，已讨论过系统性质与单位样值响应 的关系。因$h(n)$和$H(z)$是一对Z变换，所以也可以通过系统函数 $H(z)$来判断系统的稳定性。离散时间系统的系统函数$H(z)$是一个有理分式，一般可表示为：

$$H(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\ldots.+b_1 z+b_0}{z^k+a_{k-1}z^{k-1}+\ldots.+a_1 z+a_0} \qquad (8.6\text{-}5)$$

因为单位样值响应$h(n)$和系统函数 $H(z)$ 是一对Z变换，为了对 $H(z)$求反变换而获得 $h(n)$，

令 $$Q(z)=\frac{H(z)}{z}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+....+b_1 z+b_0}{z(z^k+a_{k-1}z^{k-1}+....+a_1 z+a_0)} \quad \textbf{（8.6-6）}$$

设$H(z)$有k个单极点为 $p_i\ (i=1,2,...k)$，则由部分分式展开法可知：

$$H(z)=k_0+\frac{k_1 z}{z-p_1}+....+\frac{k_k z}{z-p_k}=k_0+\sum_{i=1}^{k}\frac{k_i z}{z-p_i} \quad \textbf{（8.6-7）}$$

对上式求反变换得：

$$h(n)=k_0\delta(n)+\sum_{i=1}^{k}k_i(p_i)^n \quad \textbf{（8.6-8）}$$

各极点$p_i\ (i=1,2,...k)$是复平面上的复数，用极座标表示，设 $p_i=r_i e^{\varphi_i}$ 则 $$h(n)=k_0\delta(n)+\sum_{i=1}^{k}k_i(r_i)^n e^{n\varphi_i} \quad \textbf{（8.6-9）}$$

由（8.6-9）式可以得出如下结论：

1）如果有极点在单位园外，则当 $n \to \infty$时$h(n) \to \infty$，系统不稳定；

2）如果所有极点都在单位园内，则当$n \to \infty$时$h(n) \to 0$，系统稳定；

3）如果有极点在单位园上，即有$r = 1$的情况，进一步分析有关Z变换对后，可知，若是一阶极点，则系统是临界稳定的；若是二阶极点，则系统是不稳定的。

例8.6-3 已知离散系统的差分方程为：

$$y(n+2)+1.2y(n+1)-0.64y(n)=e(n+1)+e(n)$$

试判断系统的稳定性。

解：用移序算子表示原差分方程，得：

$$E^2y(n)+1.2Ey(n)-0.64y(n)=Ee(n)+e(n)$$

运算可得 $$y(n)=\frac{E+1}{E^2+1.2E-0.64}e(n)$$

转移算子式 $$H(E)=\frac{E+1}{E^2+1.2E-0.64}$$

因此系统函数 $$H(z)=H(E)\Big\}_{E=z}=\frac{z+1}{E^2+1.2E-0.64}$$

令系统函数的分母多项式等于零，求得两个极点分别是： $p_1 = -1.6$， $p_2 = -0.4$

因为有一个极点**-1.6**在单位园外，故系统不稳定。

解法二：由原差分方程的左边可得特征方程为：，

$$E^2 + 1.2E - 0.64 = 0$$

两特征根为 $E_1 = -1.6$， $E_2 = -0.4$ ，与连续时间系统类似，特征方程的特征根就是系统函数的极点，因此可知有一个极点**-1.6**在单位园外，故系统不稳定。

【比较两种解法，可见解法二要简洁许多】

8.7 用Z变换解差分方程

用拉普拉斯变换可以将微积分方程变成代数方程，而用Z变换则可以将差分方程变成代数方程。两者都是先求出变换域的解之后，再通过求反变换获得时域解。本节将通过实例来讨论用Z变换解差分方程的步骤和方法。

8.7.1 用Z变换求零输入响应

用Z变换求零输入响应时经常要用到的是Z变换的位移性质，用Z变换求前向差分方程的零输入响应时，经常要用到的Z变换的两条位移性质是： $Z[f(n+1)] = zF(z) - zf(0)$

$$Z[f(n+2)] = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$$

例8.7-1 已知离散系统的转移算子式 $H(E)=\dfrac{E(7E-2)}{(E-0.5)(E-0.2)}$

初始条件 $y(0)=2$ ， $y(1)=4$ ， 求系统的零输入响应。

解（1）求系统的差分方程

根据： $$y(n)=H(E)\cdot e(n)=\frac{E(7E-2)}{(E-0.5)(E-0.2)}e(n) \qquad （1）$$

可得系统方程为：

$$y(n+2)-0.7y(n+1)+0.1y(n)=7e(n+2)-2e(n+1)$$

（2）求系统的零输入响应 $y_{zi}(n)$

求 $y_{zi}(n)$时，差分方程右边的激励项为零，$y_{zi}(n)$ 应满足方程：

$$y_{zi}(n+2)-0.7y_{zi}(n+1)+0.1y_{zi}(n)=0 \qquad （2）$$

对上式两边取z变换：

$$z^2Y_{zi}(z)-z^2y_{zi}(0)-zy_{zi}(1)-0.7[zy_{zi}(0)-zy_{zi}(0)]+0.1y_{zi}(z)=0$$

根据约定，已知 $y(0)=y_{zi}(0)=2$， $y(1)=y_{zi}(1)=4$ ， 代入上式后解出：

$$Y_{zi}(z)=\frac{2z^2+4z-1.4z}{z^2-0.7z+0.1}=\frac{z(2z+2.6)}{(z-0.5)(z-0.2)} \qquad （3）$$

令 $Q(z)=\dfrac{Y_{zi}(z)}{z}=\dfrac{2z+2.6}{(z-0.5)(z-0.2)}$

可得 $Q(z)=\dfrac{12}{z-0.5}+\dfrac{-10}{z-0.2}$ 所以 $Y_{zi}(z)=\dfrac{12z}{z-0.5}-\dfrac{10z}{z-0.2}$

对上式取反变换可得： $Y_{zi}(n)=[12(0.5)^n-10(0.2)^n]\cdot\varepsilon(n)$ 解毕。

用Z变换求后向差分方程的零输入响应时，经常要用到的Z变换的两条位移性质是：

$Z[f(n-1)] = z^{-1}F(z) + f(-1)$ ； $Z[f(n-2)] = z^{-2}F(z) + z^{-1}f(-1) + f(-2)$

例8.7-2已知离散系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = e(n)$$

且初始状态 $y(-1) = 0$ ，$y(-2) = 0.5$，求系统的零输入响应。

解：零输入响应 应满足方程：

$$y_{zi}(n) + 3y_{zi}(n-1) + 2y_{zi}(n-2) = 0 \quad （1）$$

对（1）式两边取Z变换，有：

$$y_{zi}(z) + 3\left[z^{-1}y_{zi}(z) + y_{zi}(-1)\right] + 2\left[z^{-2}y_{zi}(z) + z^{-1}y_{zi}(-1) + y_{zi}(-2)\right] = 0 \quad （2）$$

因为 $y_{zi}(-1)=y(-1)=0 \qquad y_{zi}(-2)=y(-2)=0.5$

将初始状态之值代入（2）式，并解出：

$$y_{zi}(z)=\frac{-1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{-z^2}{z^2+3z+2} \qquad (3)$$

令 $Q(z)=\frac{y_{zi}(z)}{z}=\frac{-z}{z^2+3z+2}=\frac{-z}{(z+2)(z+1)}=\frac{B_1}{z+2}+\frac{B_2}{z+1}$ （4）

求得 $B_1=-2$，$B_2=1$，代回（4）式后，可得

$$y_{zi}(z)=\frac{-2z}{z+2}+\frac{z}{z+1} \qquad (5)$$

对（5）式取反Z变换，得

$$y_{zi}(n)=\left[-2(-2)^n+(-1)^n\right]\varepsilon(n)$$

解毕。

【讲评：如果采用时域方法求解，过程会是怎样的？这里是用**Z**变换求解，两者那个更好一些，读者可自己比较。用**Z**变换求解差分方程时，必须牢记有关**Z**变换的移序性质的公式，不能用错或混淆。对于后向差分方程来说，初始条件，或称初始状态 $y(-1), y(-2)$ ……就是指系统的起始储能，即零输入时的起始条件 $y_{zi}(-1)$ ，$y_{zi}(-2)$ ，……因为激励 是在**n-0**时加入的，而 $n=-1,-2$ ，……时，激励还没有加入。但对于前向差分方程来说，初始条件是用 $y(0), y(1)$，……来表示的，这时要分清 $y(0)$是$y_{zi}(0)$呢还是$y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0)$ 。一般来说，这时仍然是 $y(0)=y_{zi}(0)$

$y(1)=y_{zi}(0)$ ， ……】

8.7.2 用Z变换求零状态响应

由第7章离散时间系统的时域分析可知，系统零状态响应： $y_{zs}(n)=e(n)*h(n)$

对上式两边取Z变换有 $\mathscr{Z}[y_{zs}(n)]=\mathscr{Z}[h(n)*e(n)]$

由卷积定理可得 $\mathscr{Z}[y_{zs}(n)]=Y_{zs}(z)=H(z)E(z)$

上式表明，系统零状态响应的Z变换等于系统单位样值响应的Z变换 $H(z)$ 与激励的Z变换 $E(z)$ 之乘积。反之，若已知系统函数 $H(z)$，和激励的Z变换 $E(z)$，则可通过求反Z变换来求系统的零状态响应，即

$$y_{zs}(n)=\mathscr{Z}[Y_{zs}(z)]=\mathscr{Z}[H(z)E(z)] \qquad \textbf{(8.7-1)}$$

无论是前向差分方程还是后向差分方程，都可以根据（**8.7-1**）式来求零状态响应。

例**8.7-3**已知离散系统的转移算子式 $H(E)=\dfrac{E(7E-2)}{(E-0.5)(E-0.2)}$ 试求激励为阶跃序列$\varepsilon(n)$时的零状态响应。

解：当$e(n)=\varepsilon(n)$时，$E(z)=\dfrac{z}{z-1}$ ，又由已知

$H(E)=\dfrac{\mathrm{E}(7E-2)}{(E-0.5)(E-0.2)}$ 可得 $H(z)=H(E)|_{E=z}=\dfrac{z(7z-2)}{(z-0.5)(z-0.2)}$

根据卷积定理知

$$Y_{zs}(z)=H(z)\cdot E(z)=\frac{z(7z-2)}{(z-0.5)(z-0.2)}\cdot\frac{z}{z-1}$$

部分分式分解后得：

$$Y_{zs}(z)=\frac{12.5z}{z-1}-\frac{5z}{z-0.5}-\frac{0.5z}{z-0.2}$$

所以，求反变换后得：

$$y_{zs}(n)=[(12.5-5(0.5)^{n}-0.5(0.2)^{n}]\cdot\varepsilon(n)$$ 解毕。

例8.7-4 已知描述系统工作特性的差分方程为：

$$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=e(n)+e(n-1)$$

求激励 $e(n)=\varepsilon(n)$ 时的零状态响应。

解：用移序算子表示差分方程，有：

$$y(n)+0.2E^{-1}y(n)-0.24E^{-2}y(n)=e(n)+E^{-1}e(n)$$

化简后可得： $$y(n)=\frac{(1+E^{-1})}{(1+0.2E^{-1}-0.24E^{-2})}e(n)$$

由上式可求得系统函数为： $$H(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}$$

激励 $e(n)=\varepsilon(n)$ 的Z变换为： $$E(z)=\frac{z}{z-1}$$

于是有： $$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}\bullet\frac{z}{z-1}$$

令 $$Q(z)=\frac{Y_{zw}(z)}{z}=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}\bullet\frac{1}{z-1}$$

部分分式分解后可得： $$Y_{zs}(z)=\frac{2.08z}{z-1}-\frac{0.93z}{z-0.4}-\frac{0.15z}{z+0.6}$$

取反变换后即得 $$y_{zs}(n)=[2.08-0.93(0.4)^n-0.15(-0.6)^n]\varepsilon(n)$$

解毕。

8.7.3 用时域法和Z变换法共同求完全态响应

通过前面的例子可以看出，对于求零输入响应，一般情况下，时域法比Z变换法简便易行，故而对于求零状态响应，一般情况下，Z变换法比时域法简便易行，故可用时域法和Z变换法共同求完全态响应。

例8.7-5已知描述系统工作特性的差分方程为：

$$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=e(n)+2e(n-2)$$

且初始状态 $y(-1)=2$，$y(-2)=-\frac{1}{2}$，激励 $e(n)=\varepsilon(n)$，求系统的完全响应。

解：**1**）求零输入响应

差分方程的特征方程为： $E^2-E-2=0$

特征根为： $E_1 = 2，\quad E_2 = -1$

故零输入响应： $y_{zi}(n) = c_1 2^n + c_2(-1)^n$

代入初始状态后可得 $\begin{cases} c_1 2^{-1} + c_2(-1)^{-1} = 2 \\ c_1 2^{-2} + c_2(-1)^{-2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

于是 $y_{zi}(n) = [2(2)^n - (-1)^n]\varepsilon(n)$

2）求零状态响应

由系统方程可得系统函数为 $H(z) = \dfrac{z^2 + 2}{z^2 - z - 2}$

而 $E(z) = \dfrac{z}{z-1}$

于是 $$Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\frac{z^2+2}{(z^2-z-2)}\frac{z}{z-1}$$

令 $$Q(z)=\frac{Y_{zs}}{z}=\frac{z^2+2}{(z^2-z-2)}\frac{1}{z-1}=\frac{B_1}{z-2}+\frac{B_2}{z+1}+\frac{B_3}{z-1}$$

解得 $$B_1=2,\quad B_2=\frac{1}{2},\quad B_3=-\frac{3}{2}$$

于是 $$Y_{zs}(z)=\frac{2z}{z-2}+\frac{\frac{1}{2}z}{z+1}-\frac{\frac{3}{2}z}{z-1}$$

求反变换后得： $$y_{zs}(n)=[2(2)^n+\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{3}{2}]\varepsilon(n)$$

（3）完全响应 $$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$$

$$=[4(2)^n-\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{3}{2}]\varepsilon(n)$$ 解毕。

解法二：因题目只要求完全响应，故可直接对差分方程两边取z变换，根据移序性质可得

$$Y(z) - [z^{-1}Y(z) + y(-1)] - 2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = E(z) + 2z^{2}E(z)$$

将 $y(-1) = 2$， $y(-2) = -\frac{1}{2}$ 代入上式，进行运算，整理可得

$$Y(z) = \frac{z(z+4)}{(z-2)(z+1)} + \frac{z^{2}+2}{(z^{2}-z-2)}\frac{z}{z-1}$$

部分分式分解后得

$$Y(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z+1} + \frac{2z}{z-2} + \frac{\frac{1}{2}z}{z+1} - \frac{\frac{3}{2}z}{z-1}$$

$$= \frac{4z}{z-2} - \frac{\frac{1}{2}z}{z+1} - \frac{\frac{3}{2}z}{z-1}$$

对上式求反变换即得完全响应

$$y(n) = [4(2)^{n} - \frac{1}{2}(-1)^{n} - \frac{3}{2}]\varepsilon(n)$$

解毕。

【比较两种解法，知道解法二的计算过程要繁复得多，故一般可采用时域法和Z变换法结合来共同求完全态响应。】

8.7.4 离散时间系统的实际应用

例**8.7-6** 个人向银行借贷购房，实行按月等额均还办法，即每个月以相同的还款数**R** 归还本金与利息， **N**个月还清本息。设贷款总额为**P**，月利率为**K**，求计算**R** 的公式。若 $P=10(\text{万元})$ ，$N=120$ （**10**年），$K=0.004275$，求 R 之值。

解：求解这类问题的方法和兔子生育问题是类似的，就是依据题意，逐月计算，寻找规律，列表如下：

第 n 个月	欠款余额表达式
0	y(0)=P
1	$y(1)=P(1+K)-R$
2	$y(2)=y(1)(1+K)-R=P(1+K)^2-R(1+K)-R$
3	$y(3)=y(2)(1+K)-R=P(1+K)^3-R(1+K)^2-R(1+K)-R$
....	....
n	$y(n)=P(1+K)^n-R(1+K)^{n-1}-R(1+K)^{n-2}-\ldots-R$

用例子来说明上表的含义，若 $y(0)$代表**06**年**12**月**5**日向银行借贷 **P** 元，则 $y(1)$表示**07**年**1**月**5**日按月均还**R** 元后的欠款余额，其余类推。“依据按月等额均还”办法的含义，应该有：

第 **n**个月的欠款余额=上个月的欠款余额 —每月的还款额，所以，描述此法贷款的差分方程是:

$$y(n)=y(n-1)\cdot(1+K)-R\varepsilon(n-1) \qquad ①$$

整理后成为：$y(n)-(1+K)y(n-1)=-R\varepsilon(n-1) \qquad ②$

且初始条件是：$y(0)=P$ ，对方程②两边取 变换：

$$Y(z)-(1+K)\left[z^{-1}Y(z)+y(-1)\right]=-\frac{R}{z-1}$$

为了获得初始条件 $y(-1)$，可令 **n=0**，代入②式，

得 $$y(0)-(1+K)y(-1)=0 \qquad ③$$

因为 $y(0)=P$，所以 $y(-1)=\dfrac{P}{1+K}$ ，将 $y(-1)$ 代入③式后得：

$$y(z)-(1+K)[z^{-1}Y(z)+\frac{p}{1+K}=\frac{-R}{z-1} \qquad ④$$

从④式中解得：

$$Y(z)=\frac{pz}{z-(1+K)}-\frac{Rz}{[z-(1+K)(z-1)]}$$

$$=\frac{pz}{z-(1+K)}-\frac{R}{K}\cdot\frac{z}{z-(1+K)}+\frac{R}{K}\cdot\frac{z}{z-1} \qquad ⑤$$

对⑤式两边取反变换得：

$$y(n)=[P(1+K)^n-\frac{R}{K}(1+K)^n+\frac{R}{K}]\varepsilon(n) \qquad ⑥$$

到第**N** 个月还清本息，故在⑥式中，**n=N** 时， $y(N)=0$ ，

故可得： $$P(1+K)^N-\frac{R}{K}(1+K)^N+\frac{R}{K}=0$$

从⑦式中解出：

$$R=P\cdot\frac{K(1+K)^N}{(1+K)^N-1} \qquad ⑧$$

⑧式就是所求每月还款数目的计算公式。

当 $P = 10$ 万元， 时，代入公式⑧，可以求得 $R = 1067.2$ 元，即每月还款**1067.2**元，连续还**120**个月，共计还款额为**12.8064**万元。

【讲评：这个问题的求解，用差分方程并不是最简单的，细心的读者从列表过程中可以发现，利用等比级数求和公式可以较快地解出公式⑧。就是建立了差分方程②之后，用 变换来求解也不是最简洁的，对于差分方程②的求解，

用时域经典法则更方便，所谓时域经典法，即将完全解分成齐次解和特解，先分别求齐次解，特解、最后利用初始条件确定齐次解中的待定系数。当 **P**，**K**，**N**之值选定之后，利用⑧式计算 的过程，也是值得研究的。利用什么方法能算得又快又准？并且精确到**0.01**元。如果差分方程①改为前向差分方程，求解过程也会相应地发生变化，这些都留给读者去研究。大学生的学习，应该带有研究性、探索性，以便为研究生阶段的学习、研究工作或进入社会工作打下良好的基础。】

补充：解法二：用前向差分方程求解，且用Z变换直接求出完全响应。

根据上述分析，可列出前向差分方程为：

$$y(n+1) = y(n)(1+k) - R\varepsilon(n)$$

写成标准形式：

$$y(n+1) - y(n)(1+k) = -R\varepsilon(n) \qquad （1）$$

且初始条件是：$y(0) = P$ ，对方程（1）两边取Z 变换，得：

$$zY(z) - zy(0) - (1+K)Y(z) = -\frac{Rz}{z-1}$$

将初始条件 $y(0) = P$ 代入上式，并进行运算，整理为：

$$zY(z) - zp - (1+K)Y(z) = -\frac{Rz}{z-1}$$

$$[z-(1+K)]Y(z)=z(p-\frac{R}{z-1})$$

即 $$y(z)=\frac{z(pz-p-R)}{[z-(k+1)](z-1)}$$

令 $$Q(z)=\frac{y(z)}{z}=\frac{(pz-p-R)}{[z-(k+1)](z-1)}=\frac{A_1}{z-(k+1)}+\frac{A_2}{z-1} \quad （2）$$

解得:

$$A_1=Q(z)[z-(k+1)\}\Big|_{z=k+1}=\frac{pk-R}{k}$$

$$A_2=Q(z)(z-1)\Big|_{z=1}=\frac{R}{k}$$

将A_1，A_2代回到（2）式，于是得到

$$y(z)=(p-\frac{R}{k}).\frac{z}{z-(k+1)}+\frac{R}{k}\cdot\frac{z}{z-1} \qquad (3)$$

对（3）式两边取反变换得：

$$y(n)=[P(1+K)^n-\frac{R}{K}(1+K)^n+\frac{R}{K}]\varepsilon(n) \qquad (4)$$

到第N 个月还清本息，故在（4）式中，$n=N$ 时，$y(N)=0$，

故可得：

$$P(1+K)^N-\frac{R}{K}(1+K)^N+\frac{R}{K}=0 \qquad (5)$$

从（5）式中解出：

$$R=P\cdot\frac{K(1+K)^N}{(1+K)^N-1} \qquad (6)$$

（6）式就是所求每月还款数目的计算公式。

这和解法一的结果是一样的。

解法三：用前向差分方程求解，且用时域法求零输入响应，用Z变换求零状态响应

根据上述分析，可列出前向差分方程为：

$$y(n+1) = y(n)(1+k) - R\varepsilon(n)$$

写成标准形式：

$$y(n+1) - y(n)(1+k) = -R\varepsilon(n) \qquad （1）$$

且初始条件是：$y(0)=P$ 。

将方程的完全响应分解为零输入响应和零状态响应。

1）用时域法求零输入响应

由（1）式可知特征根为 $\alpha=(1+\mathrm{k})$

所以 $y_{zi}(n)=c(1+k)^n$ （2）

将初始条件是：$y(0)=P$ 代入（2）式得

$$y_{zi}(0)=c(1+k)^0=p$$

故得 $c=p$,于是 $y_{zi}(n)=p(1+k)^n\varepsilon(n)$ （3）

2）用Z变换求零状态响应

用移序算子表示（1）式有：

$$[E-(1+k)]y(n)=-R\varepsilon(n) \quad （4）$$

因方程右边的激励 $e(n)=-R\varepsilon(n)$ 故可知

转移算子式为 $H(E)=\dfrac{1}{E-(1+k)}$

所以系统函数

$$H(z)=\frac{1}{z-(1+k)}$$

而激励 $e(n)=-R\varepsilon(n)$

的Z变换为 $E(z)=\dfrac{-Rz}{z-1}$

于是 $Y_{zs}(z)=H(z)E(z)=\dfrac{1}{z-(1+k)}\cdot\dfrac{-Rz}{z-1}$

令 $Q(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{z}=\dfrac{1}{z-(1+k)}\cdot\dfrac{-R}{z-1}=\dfrac{B_1}{z-(1+k)}+\dfrac{B_2}{z-1}$ **（5）**

则可解得：$B_1=Q(z)\left[z-(1+k)\right]\Big|_{z=1+k}=.\dfrac{-R}{1+k-1}=\dfrac{-R}{k}$

$$B_2 = Q(z)(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{-R}{1-(1+k)} = \frac{R}{k}$$

将所得之B_1，B_2代入（5）式即得

$$Y_{zs}(z) = \frac{(-R/k)z}{z-(1+k)} + \frac{(R/k)z}{z-1} \qquad \text{（6）}$$

对（6）式两边取反变换得：

$$y_{zs}(n) = [-\frac{R}{k}(1+k)^n + \frac{R}{k}]\varepsilon(n) \qquad \text{（7）}$$

由（3）式和（7）式可得完全响应

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = [p(1+k)^n - \frac{R}{k}(1+k)^n + \frac{R}{k}]\varepsilon(n) \qquad \text{（8）}$$

这和解法一，解法二的结果是一样的。

解法四：用等比数列的求和公式求解。

根据解法一的分析，由列表的最后一行可得：

$$y(n)=P(1+k)^{n}-R(1+k)^{n-1}-R(1+k)^{n-2}-...-R(1+k)^{0}$$

$$=P(1+k)^{n}-[R\frac{1-(1+K)^{n}}{1-(1+k)}]$$

$$=P(1+k)^{n}+\frac{R}{k}[1-(1+k)^{n}]$$

$$=P(1+k)^{n}-\frac{R}{k}(1+k)^{n}+\frac{R}{K}$$ 显然，$(n\geq 0)$

这里得到的结果和前三种解法的结果是一样的。后一部分的求解过程完全相同，不再叙述。

例8.7-7 一种地球物理探矿方法是，由发射机不断地向地表发射单位样值信号 $\delta(n)$ ，地表的响应信号 $y_{zs}(n)$ 由接收机收到后，接收机的输出信号为 $r_{zs}(n)=[\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^n]-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n]\cdot\varepsilon(n)$ 已知接收机的单位样值响应为 $h_2(n)=(\frac{1}{2})^n\cdot\varepsilon(n)$ ，求表征地表特征的 $h_1(n)$ 。

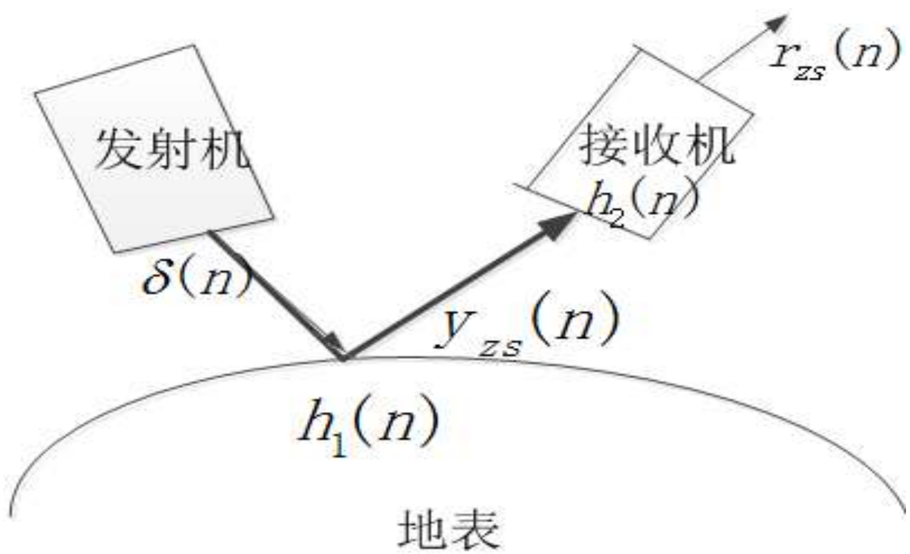

图8.7-1 地球物理探矿示意图

解：根据题意，可画出由 $\delta(n)$转变成 $y_{zs}(n)$的过程如图8.7-1所示，由图可知：

$$y_{zs}(n) = \delta(n) * h_{1(n)} \qquad （1）$$

$$r_{zs}(n) = y_{zs}(n) * h_2(n) \qquad （2）$$

将（1）式代入（2）式得

$$r_{zs}(n) = \delta(n) * h_1(n) * h_2(n) = h_1(n) * h_2(n) \qquad （3）$$

对（3）式两边取 变换得： $R_{zs}(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

所以 $$H_1(z) = \frac{R_{zs}(z)}{H_2(z)} \qquad （4）$$

由已知条件，可求得

$$R_{zs}(z) = Z[r_{zs}(n)] = \frac{4}{3} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \qquad （5）$$

$$H_2(z) = Z[h_2(n)] = \frac{z}{z - 1/2} \quad (6)$$

将（5）、（6）两式代入（4）式，可求得

$$H_1(z) = \frac{5}{3} - \frac{\frac{2}{3}z}{z - \frac{1}{3}} \quad (7)$$

所以 $h_1(n) = Z^{-1}[H_1(z)] = \frac{5}{3}\delta(n) - \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^n \cdot \varepsilon(n)$ 解毕。

【讲评：到此，共讲了三个应问题，可用差分方程求解，包括免子繁殖，住房贷款、物理探矿。实际上，在科研和生产中存在大量的应用问题可以用差分方程来解决，需要留心观察和总结，或多看资料都可以获取这方面的知识。】