

第5章 动态电路的时域分析

本章重点

5.1 一阶电路

5.2 二阶电路

5.3 高阶电路

5.4 卷积积分

5.1 一阶电路

1、只包含一个电容元件或一个电感元件的电路（或只包含了一个等效电容或只包含一个等效电感的电路）称为一阶电路。

2、由于电容或和电感的元件的动态特性，使得所以要用微分方程描述电路的方程要用微分方程。只含一个电容或电感的电路的网络方程是一阶微分方程，所以这种电路就称为一阶电路。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

设有电路如图5.1所示，且 $U_S=U_0$ ，在 $t=0$ 时刻以前电容 C 元件与直流电压源 U_S 相连接已久，设 $U_S=U_0$ ，当 $t=0$ 时刻， S_1 断开， S_2 闭合。

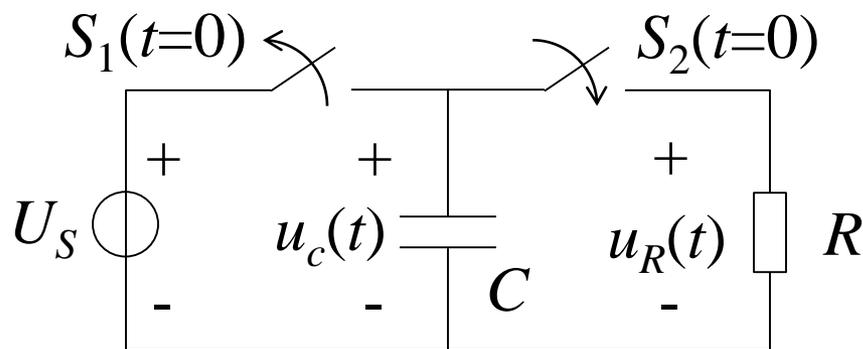


图5.1 RC电路

由于电容元件是储能元件， $t=0$ 时刻 C 虽然与直流电压源脱离，但同时连接 R 元件，但是电容支路中无冲击电流，故其中存储的电场能量不能跃变，所以 $u_C(0_+)=u_C(0_-)$ ，而 $u_C(0_-)=U_0$ ，所以 $u_C(0_+)=U_0$ 。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

$t=0$ 以后的电路如图5.2所示。

根据KCL有

$$i_C(t) + i_R = 0$$

根据KVL有

$$u_R(t) = u_C(t)$$

根据元件的伏安特性有

$$u_R(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, u_C(0_+) = U_0$$

$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

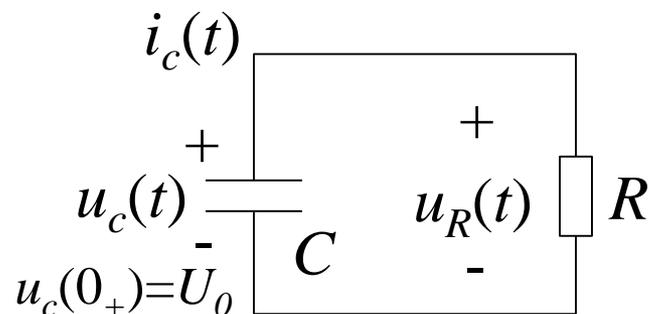


图5.2 $t=0$ 时刻后的电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

联立以上各式有

$$C \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_R(t)}{R} = 0$$
$$u_C(0_+) = U_0$$

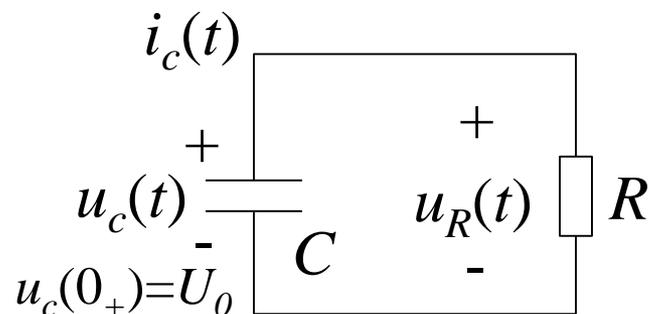


图5.2 $t=0$ 时刻后的电路

用分离变量法解上述方程得

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} dt, u_C(0_+) = U_0$$

用不定积分求解，得

$$\int \frac{du_C(t)}{u_C} = \int -\frac{1}{RC} dt + C', u_C(0_+) = U_0$$

$$\ln u_C(t) = -\frac{1}{RC} t + C'$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

可解得

$$u_C(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} e^{C'} = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

其中， k 为积分常数。

积分常数可以确定为

$$u_C(0_+) = ke^{-\frac{0}{RC}} = k = U$$

所以 $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} (t \geq 0)$ 。由于 $R > 0$ ， $C > 0$ ，所以 $u_C(t)$ 是以 U_0 为起始值随时间作指数衰减的函数。当 $t = \infty$ 时， $u_C(\infty) = 0$ 。

$u_C(t)$ 衰减速度的快慢取决于 RC 的值。

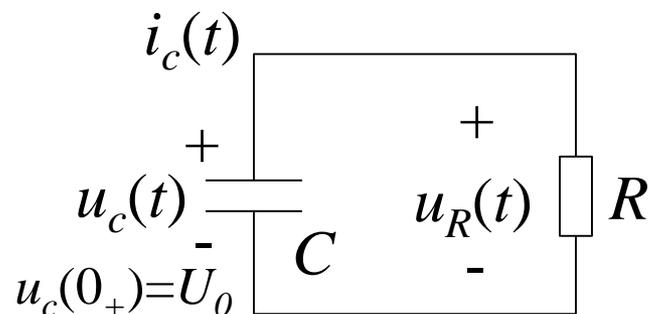


图5.2 $t=0$ 时刻后的电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

当 $t_1=RC$ 时,

$$u_C(t_1) = U_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = \frac{U_0}{e} = 0.386U_0$$

当 $t_2=4RC$ 时,

$$u_C(t_2) = U_0 e^{-\frac{4RC}{RC}} = \frac{U_0}{e^4} = 0.0184U_0$$

由以上分析可知,从理论上来说是在 $t \rightarrow 0$ 时才衰减至0,但实际上在 $t=4RC$ 时, $u_C(t)$ 的值就已经下降为起始值的1.8%,所以在 $t=4RC$ 时以后就可以认为 $u_C(t)$ 的值基本上衰减至0了。因而 RC 是决定其衰减快慢的一个常数,称为时间常数,用 τ 表示, $\tau=RC$,具有时间的量纲,基本单位为秒。

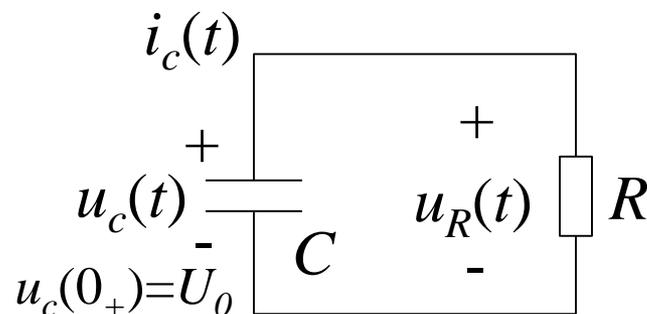


图5.2 $t=0$ 时刻后的电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

只有一阶电路才有时间常数 τ 的概念。时间常数越大， $u_C(t)$ 从起始值衰减至0的时间越长。函数 $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (t \geq 0)$ 的曲线如图5.3所示。电阻电抗 $u_R(t) = u_C(t)$ ，故其曲线与 $u_C(t)$ 的曲线完全相同。

电阻电流

$$i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_C(t)}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

电容电流

$$i_C(t) = -i_R(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

或

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = CU_0 \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

电阻电流 $i_R(t)$ 和电容电流 $i_C(t)$ 的曲线如图5-4所示。电容电流为负值说明电容始终处于放电状态。

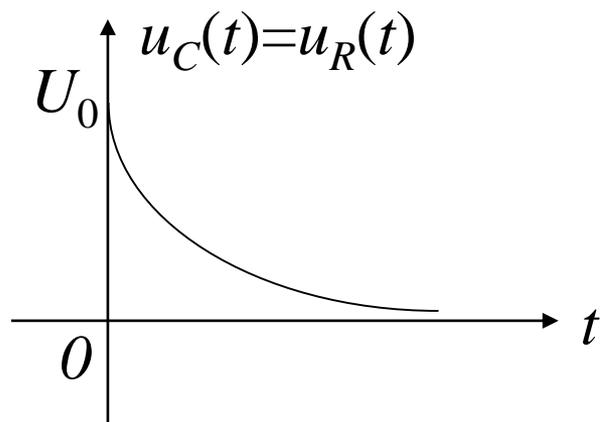


图5.3 u_c 变化曲线

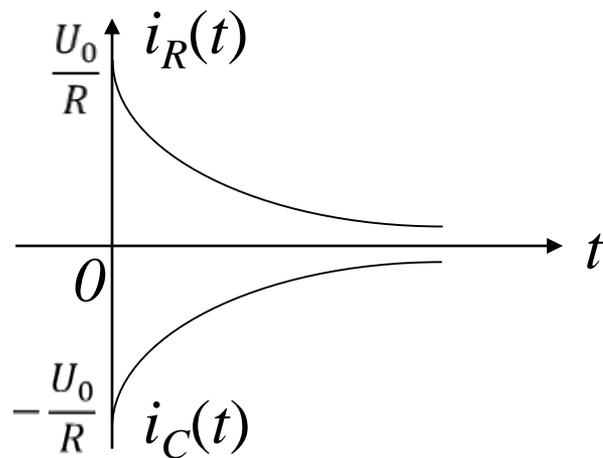


图5.4 $i_R(t)$ 和 $i_C(t)$ 变化曲线

物理现象解释：当 S_1 和 S_2 同时动作瞬间时，电容元件的电场能量不能跃变，导致起始电压与初始电压相等，即 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

在 $t \geq 0$ 之后的时刻，电容与电阻处于同一电路中，短租原件上的电压为 $u_R(t) = u_C(t)$ ， $u_R(0_+) = u_C(0_+)$ 。所以电路中出现电流 $i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R}$ ，其中 $i_R(0_+) = \frac{U_0}{R}$ 。

由于电阻元件是耗能原件，只要有电流通过，就会将电能转化成热能消耗掉，而电容储存的能量是有限的，所有最终电场能量将全部转化为热能而消耗殆尽。当电能自然就终止了，从而电路的过渡过程结束。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.1 RC电路的零输入响应

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $t=0_+$ 时, $u_C(0_+)=U_0$; 当 $t=\infty$ 时, $u_C(\infty)=0$ 。

$$i_C(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $t=0_+$ 时, $i_C(0_+)=-\frac{U_0}{R}$; 当 $t=\infty$ 时, $i_C(\infty)=0$ 。

$$u_R(t) = u_C(t)$$

$$i_R(t) = -i_C(t)$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

电路中有储能元件 C 或电感 L ，电容 C 上无初始电压，即 $u_C(0_-)=0$ ，这样的电路成为零状态电路。零状态电路对外加激励的响应称为零状态响应。

如图5.5所示的电路，设 $u_C(0_-)=0$ ， S 在 $t=0$ 时闭合， U_S 为直流电压源。

在 $t \geq 0$ 的时刻，根据KVL：

$$u_R(t) + u_C(t) = U_S$$

在 $t \geq 0$ 的时刻，根据KCL：

$$i_R(t) = i_C(t)$$

在 $t \geq 0$ 的时刻，根据伏安特性：

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

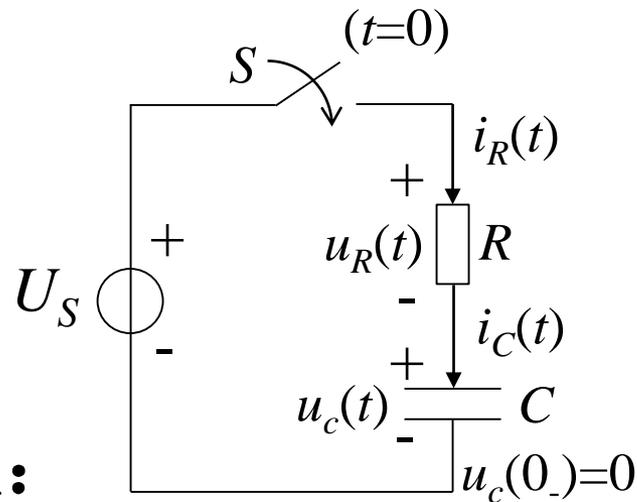


图5.5 RC零状态电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, u_C(0_-) = 0$$

综合上述四式可得

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_S, u_C(0_-) = 0$$

将上式与零输入响应中的微分方程相比较，可发现两个方程的左边是完全相同的。只是零输入响应中的微分方程式齐次式，等号右边为0；上式为非齐次式，等号右边为 U_S 。

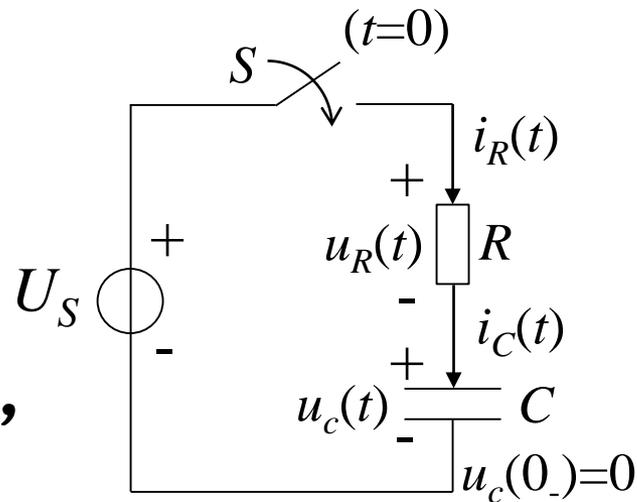


图5.5 RC零状态电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

上式的通解形式仍然为 $ke^{-\frac{t}{RC}}$ ，其完全解为：

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ct}(t) \quad (t \geq 0)$$

其中， $u_{Cp}(t)$ 为特解， $u_{Ct}(t)$ 为通解，所以

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

从微分方程的知识可知，特解的形式与激励的形式相同，即 $u_{Cp}(t)$ 与方程式等号右边的函数具有相同的形式。现激励为直流电压源，即 U_S 为常数，所以 $u_{Cp}(t)$ 也为常数，令其为 A 。既然 $u_{Cp}(t)=A$ 是微分方程，那么它也应该满足原方程，故可得

$$C \frac{dA}{dt} + A = U_S$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

所以，解得

$$u_{Cp}(t) = A = U_S$$

下面确定积分常数。

$$u_C(0_+) = \left[ke^{-\frac{1}{RC}} + U_S \right]_{t=0_+} = k + U_S = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(0) dt'$$

其中， $i_C(0) = i_R(0) = \frac{U_S}{R}$ ，可见 $i_C(0) \neq \delta(0)$ ，

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0。$$

所以，可得

$$k = -U_S$$

最终得到其表达式如下：

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

$$u_C(t) = -U_S e^{-\frac{t}{RC}} + U_S \quad (t \geq 0)$$

或
$$u_C(t) = U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t \geq 0)$$

因为

$$u_R(t) = U_S - u_C(t) = U_S - (-U_S e^{-\frac{t}{RC}} + U_S) = U_S e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

由 $i_C(t) = i_R(t)$ ，可得

$$i_C(t) = i_R(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$u_C(t)$ ， $i_C(t)$ ， $u_R(t)$ ， $i_R(t)$ 随时间变化的曲线如图5.6所示。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.2 RC电路的零状态响应

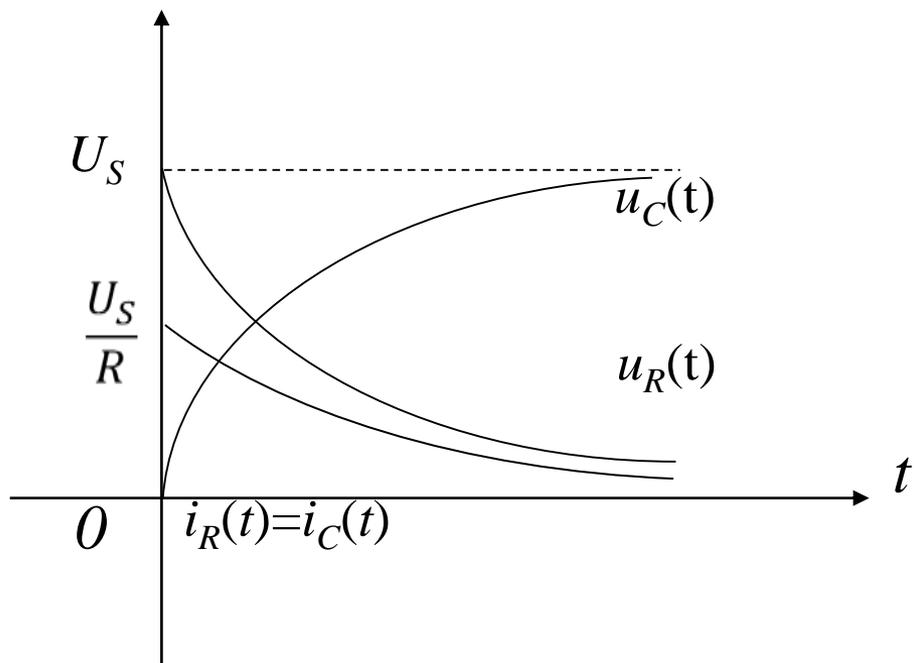


图5.6 $u_C(t)$, $i_C(t)$, $u_R(t)$, $i_R(t)$ 变化曲线

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.3 RC电路的全响应

当电路中储能元件的初始状态不为零，又有外加激励时，在初始状态与外加激励共同作用下的响应称为全响应。在图5.7中， $u_C(0_-)=u_0$ ，在 $t=0$ 时刻合上开关S。

在 $t \geq 0$ 时刻，有

$$u_R(t) + u_C(t) = U_S$$

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t)$$

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = i_C(t), u_C(0_-) = U_0$$

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

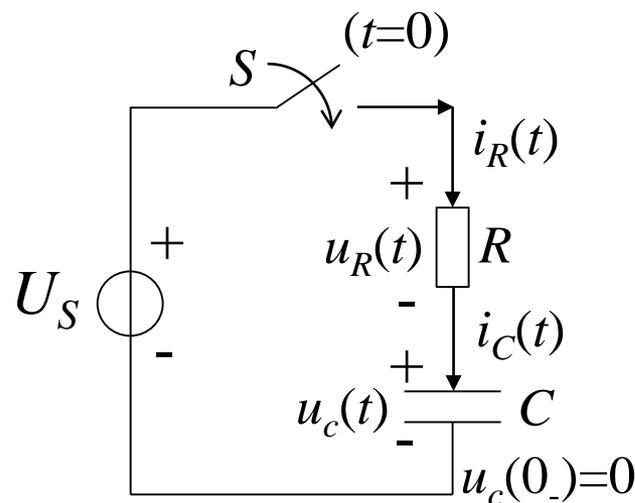


图5.7 RC全响应电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.3 RC电路的全响应

联立以上各式，得出以下方程：

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_S, u_C(0_-) = U_0$$

在 $t=0$ 时刻， R 上的电压为 $u_R(0)=U_S-U_0$ 。只要 $U_S \neq U_0$ ，则 $u_R(0) \neq 0$ 。

由已知，有 $i_C(0) = i_R(0) = \frac{U_S - U_0}{R} \neq \delta(t)$ ，所以 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 。

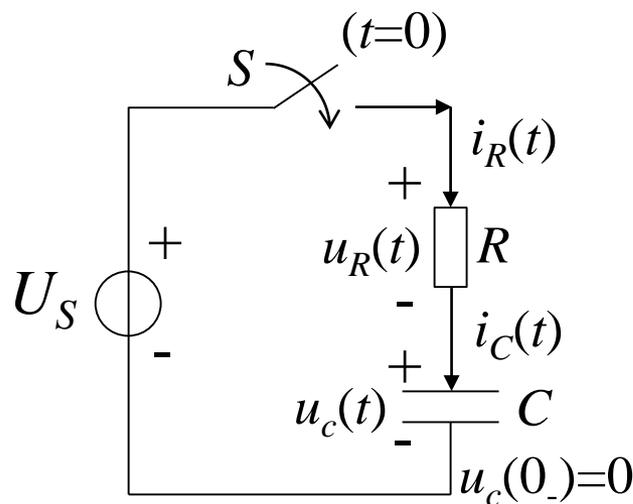


图5.7 RC全响应电路

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.3 RC电路的全响应

将式(5-15)与零状态响应中的式(5-10)相比较,发现两个微分方程式完全相同,所不同的只是起始条件。式(5-20)为 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$,式(5-15)是 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$ 。

微分方程的解仍然有通解和特解两部分,其特解仍然由激励决定,通解的积分常数则取决于特解和通解的起始条件。

式(5-15)的解为

$$u_C(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + U_S \quad (t \geq 0)$$

由 $u_C(0_+) = k + U_S = U_0$,故可得 $u_C(t) = (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} + U_S$ 。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

$$u_C(t) = \underbrace{(U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{暂态分量 (响应)} \\ \text{也称为自由分量 (响应)} \\ u_{ct}(t)}} + \underbrace{U_S}_{\substack{\text{稳态分量 (响应)} \\ \text{也称为稳态分量 (响应)} \\ u_{cp}(t)}} = \underbrace{U_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{\substack{\text{零输入响应} \\ u_{zi}(t)}} + \underbrace{U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}_{\substack{\text{零状态响应} \\ u_{zs}(t)}} \quad (t \geq 0)$$

由上式可知，全响应由暂态分量与稳态分量叠加而成。从一个稳态运行状态到另一个稳定运行状态之间暂时存在的量，称为暂态分量，而 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 只取决于 τ ，与激励无关，所以该分量也称为自由分量。暂态分量为 $(U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$ ，由于 $RC > 0$ ，所以随着时间的增加该分量的值最后变为0。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

稳态分量为 U_S 或 $U_S(t)$ ，当暂态分量消失以后稳态分量的波形便单独显现出来。如果 $U_S(t)=U_S$ 是直流，则该项就是常数；如果 $U_S(t) = U_{Sm} \sin(\omega t + \varphi_1)$ ，则 $u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_2)$ 也达到了稳定状态；如果 $U_S(t) = U_m e^t$ ，则 $u_C(t) = U_{Cm} e^t$ ，其值会随着 t 的增加而越来越大，不可能稳定。但是 $u_C(t)$ 的运行形式与激励 $U_S(t)$ 相同， $u_C(t)$ 受 $U_S(t)$ 的强制作用，故该分量称为强制分量更妥。全响应也可以由零输入响应和零状态响应叠加而成。两种分解叠加方式提供了求解全响应的两种不同的方法，用暂态分量叠加稳态分量的方法无疑是求解微分方程的经典方法。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

用零输入响应叠加零状态响应求全响应，相当于使用叠加定理。先令激励为零，求出零输入响应，然后令初始状态为零，求出零状态电路对激励的响应，最后将二者叠加。这种方法之所以有可取性，是因为零输入响应式初始状态的线性函数，满足齐次性。

零输入响应为 $r_{zi}(t) = f(\mathbf{0}_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$ ，当起始状态变为 $A_1f(\mathbf{0}_+)$ 时，其零输入响应也变为 $r_{zi}(t) = f(\mathbf{0}_+)e^{-\frac{t}{\tau}}$ 。零状态响应是激励的线性函数，满足齐次性和可加性。激励函数为 $f_1(t)$ ，其零状态响应为 $r_{zi1}(t) = f_1(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ；

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

激励函数为 $f_2(t)$ ，其零状态响应为 $r_{zs2}(t) = f_2(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 。当激励函数变为 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ 时，其零状态响应为 $r_{zs}(t) = f_1(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + f_2(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = r_{zs1}(t) + r_{zs2}(t)$ 。同理，当 $f(t) = Af_1(t)$ 时，则 $r_{zs}(t) = Af_1(t)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})(t \geq 0)$ 。由此可见，如初始状态或激励中只有一个改变的话，可以只求发生改变的哪一方的相应分量，而另一响应分量保持不变；如果两方都改变时，可以分别求解响应，然后叠加。显然，全响应对于零输入响应或零状态响应来说不满足齐次性。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

在有些教科书或专业书籍中将 $r_{zi}(t)$ 用 $r_0(t)$ 表示，其含义是一样的。

【例5-1】如图5-8所示，已知 $i_S(t)=10\text{ A}$ ， $u_C(0_-)=10\text{ V}$ 。在 $t=0$ 时刻 S_1 断开， S_2 合上，求电容 C 上的电压 $u_C(t)$ 的零输入响应、零状态响应、稳态响应和暂态响应。

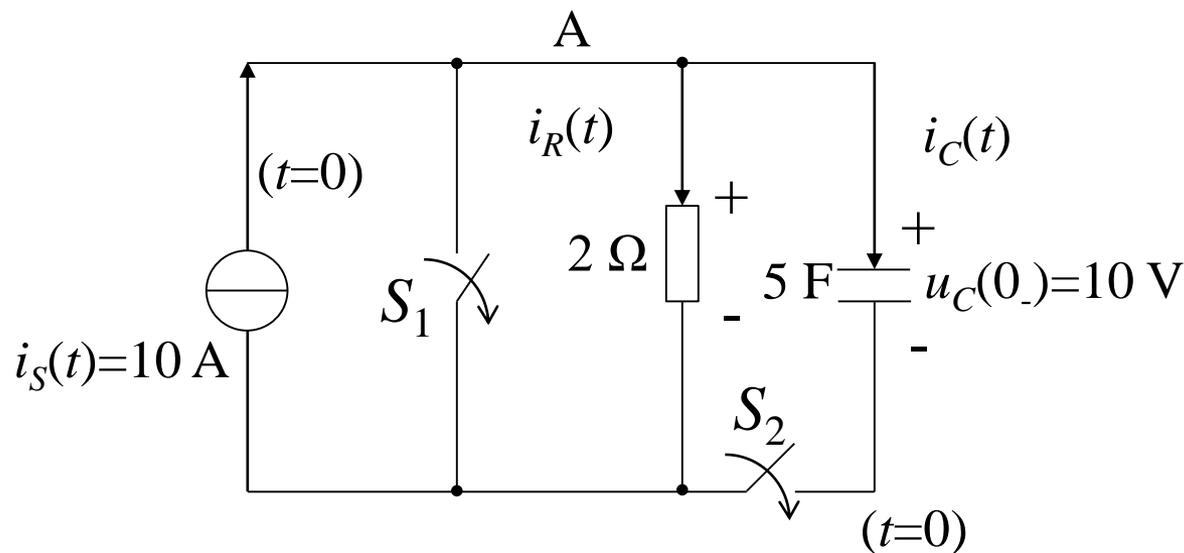


图5.8 例5-1图

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

【解】在 $t \geq 0$ 时刻，已知 $u_C(0_-) = 10 \text{ V}$ 。在节点A上可列出以下方程组：

$$\begin{cases} i_R(t) + i_C(t) = i_S(t) \\ u_R(t) = u_C(t) \\ i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R} \\ i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \end{cases}$$

所以有

$$C \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} = i_S(t)$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

(1) 求零输入响应

令激励 $i_S(t) = 0$ ，由 $RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$ ，
 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10 \text{ V}$ ， $\tau = RC = 10 \text{ s}$ ，可解得

$$u_S(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-\frac{t}{10}} \quad (t \geq 0)$$

(2) 求零状态响应

由 $C \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} = i_S(t)$ ，令 $u_C(0_+) = 0$ ，则

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = Ri_S(t)$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

可得

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 2 \times 10 \text{ V}, \quad u_{Cp}(t) = 20 \text{ V}$$

解得

$$u_C(t) = -20e^{-\frac{t}{10}} + 20 = 20(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (t \geq 0)$$

(3) 可得出全响应表达式如下

$$u_C(t) = 10e^{-\frac{t}{10}} + 20 = 20(1 - e^{-\frac{t}{10}}) \quad (t \geq 0)$$

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

(4) 求稳态响应加暂态响应。

由已知 $RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = Ri_S(t)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10 \text{ V}$ 。得

$$u_C(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + u_{Cp}$$

其中, $u_{Cp}(t) = Ri_S(t) = 20 \text{ V}$ 。

而 $u_C(0_+) = ke^0 + 20 = 10$, 故 $k=10-20=-10$, 解得

$$u_C(t) = -10e^{-\frac{t}{RC}} + 20 \quad (t \geq 0)$$

其中, $u_{Ct}(t) = -10e^{-\frac{t}{10}}$, $u_{Cp}(t) = 20 \text{ V}$ 。

5.1.1 RC电路的零输入响应、零状态响应和全响应

5.1.1.4 全响应的两种分解方式

$u_C(t)$ 随时间变化的曲线如图5.9及图5.10所示。

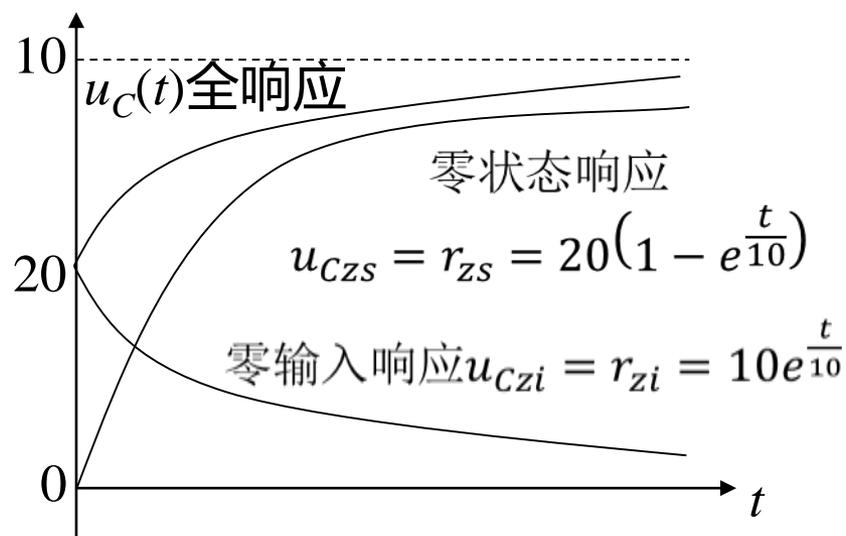


图5.9 u_C 的零输入响应和零状态响应

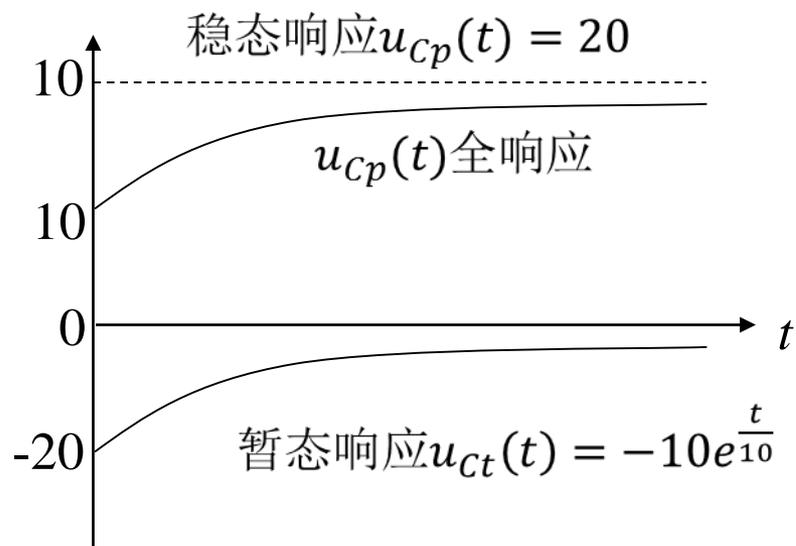


图5.9 u_C 的稳态响应和暂态响应

5.1.2 RL电路的零输入响应

有电路如图5.11所示。

设 $t < 0$ 以前 S_2 断开， S_1 合在①处已久， $t = 0$ 时 S_2 合上， S_1 由①合到②，设 $i_S(t) = I_0$ 为直流电流源。

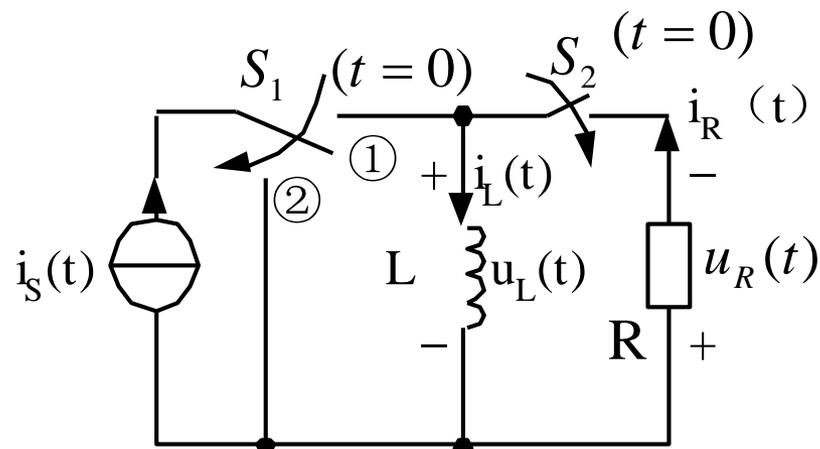


图5.11 RL零输入响应电路

由于在开关动作以前 $i_S(t)$ 与 L 连接在一起，所以 L 上的电流与电流源的电流相等， $i_L(0_-) = I_0$ 。当 $t = 0$ 时，开关动作， $i_S(t)$ 闭合，与右边的电路无关。由于 L 与 R 连接成一闭合回路，所以 $i_L(0) = i_L(0_-) = I_0$ ， $i_R(0) = i_L(0)$ 。

$\therefore u_R(0) = Ri_L(0) = RI_0$ ， $u_L(0) = -u_R(0) = -RI_0$ ，则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(0) dt' = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} (-RI_0) dt'$$

5.1.2 RL电路的零输入响应

而

$$\int_{0_-}^{0_+} (-RI_0) dt' = 0$$

解得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$$

故可得 $t \geq 0$ 以后的电路如图5.12所示。

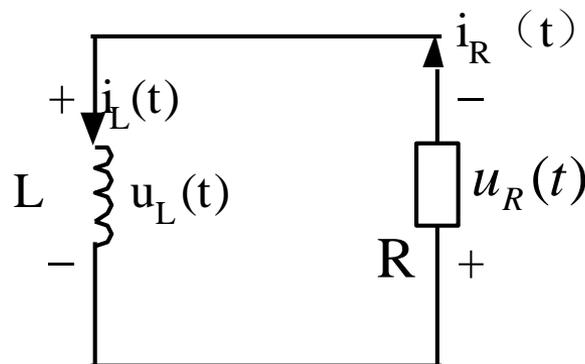


图5.12 $t \geq 0$ 时刻的电路

$$\begin{cases} u_L(t) + u_R(t) = 0 \\ i_L(t) = i_R(t) \\ u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, i_L(0_+) = I_0 \\ u_R(t) = Ri_R(t) \end{cases}$$

5.1.2 RL电路的零输入响应

综合以上四式得

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) = 0, i_L(0_+) = I_0$$

用分离变量法求解得 $\frac{di_L(t)}{i_L(t)} = \frac{-R}{L} dt$

两边同时取积分, 有 $\int \frac{di_L(t)}{i_L(t)} = \int \frac{-R}{L} dt + C$

求积分 $\ln i_L(t) = \frac{-R}{L} t + C$

解得 $i_L(t) = e^{(-\frac{R}{L}t+C)} = e^{-\frac{R}{L}t} e^C = k e^{-\frac{R}{L}t}$

其中, $\frac{R}{L}$ 相当于 RC 电路总的 $\frac{1}{RC}$, 所有 $\frac{R}{L}$ 也可以用 τ 表示。故 $\tau = \frac{L}{R} = GL$, τ 的量纲仍然是时间的量纲。

5.1.2 RL电路的零输入响应

再来确定积分常数

由已知 $i_L(0_+) = ke^0 = I_0$ ，得 $k = I_0$ 。故解得 $i_L(0_+) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} (t \geq 0)$ 。

可见， $i_L(t)$ 也是以某个起始值开始作指数衰减的一个函数，其衰减的快慢取决于 $\tau = \frac{L}{R} = GL$ ，其曲线图如图5.13所示。

RL电路的零状态响应及全响应也可以根据**KVL**、**KCL**及元件特性综合得出，电路的微分方程来求解得出，或者用**RC**电路的零状态响应及全响应的对偶得出。

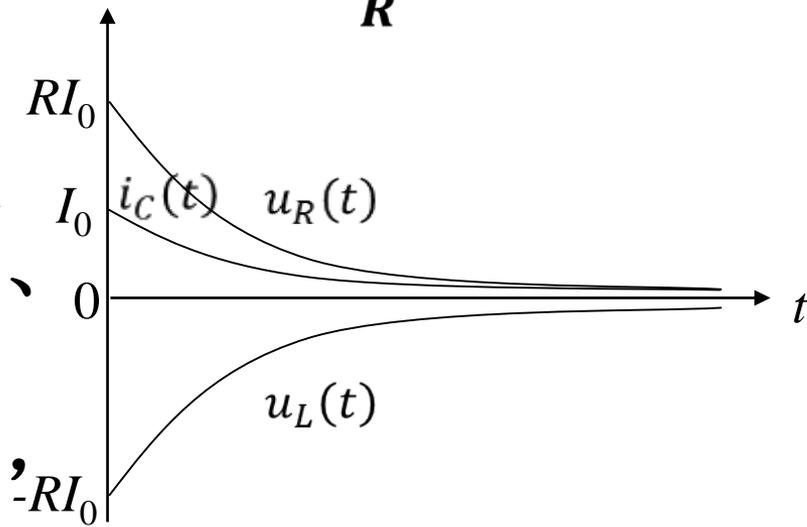


图5.13 u_R 、 u_L 、 i_c 曲线图

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

通过以上 RC 电路的零输入响应、零状态响应和全响应的分析，我们发现这些响应均与三个要素有关，即： $f(0_+)$ ， $f(\infty)$ 及时间常数 τ 。

例如： RC 一阶电路的零输入响应为 $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}}$ ，其中 $u_C(0_+) = U_0$ ； RC 一阶电路对直流电压源的零输入响应为 $u_C(t) = U_S + (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ，其中 $u_C(\infty) = U_S$ ；非初态 RC 一阶电路对电流电压源的响应为 $u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} (t \geq 0)$ ，其中， $u_C(0_+) = U_0$ ， $u_C(\infty) = U_S$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

可见，只要求出 $u_C(0_+)$ 、 $u_C(\infty)$ 、 τ 这三个要素就可以直接套用公式求解一阶电路，所以这种方法称为三要素法。

在开关有开闭的一阶电路中，任何支路的电压、电流均可用三要素法来求解。所以三要素法中的变量可以写成一下的一般形式：

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f_{0_+}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0)$$

其中， $f_{0_+}(\infty)$ 是稳态解的初识值。当激励为直流时， $f_{0_+}(\infty) = f(\infty)$ ；当激励为正弦函数时，稳态解是同频率的正弦时间函数， $f(\infty) = A_m \sin(\omega t + \varphi_2)$ ， $f_{0_+}(\infty) = A_m \sin(\varphi_2)$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

【例5-2】如图5-14所示的电路，已知直流电流源 $i_S(t)=1\text{ A}$ ， $R_1=2\ \Omega$ ， $C=3\text{ F}$ 。在 $t=0$ 时刻之前已连接，在 $t=0$ 时 S 闭合，电路中接入 $R_2=1\ \Omega$ 的电阻，求 $t\geq 0$ 时刻的 $u_C(t)$ 。

【解】在 $t<0$ 时刻， $i_S(t)$ 、 R_1 、 C 已经连接在电路中，可以以此来确定 $u_C(0_-)$ 的值。因为在直流电流作用下电容稳定运行，相当于开路，故电流只能通过 R_1 ，所以 $u_{R1}(0_-) = i_S(t) \cdot R_1 = 2 \times 1\text{ V} = 2\text{ V}$ ， $u_C(0_-) = u_{R1}(0_-) = 2\text{ V}$ 。如果 S 在 $t=0$ 时合上，由图5.15可知， $i_C(0) = i_S(t) - i_{R1}(0) - i_{R2}(0) = 1\text{ A} - \frac{2}{2}\text{ A} - \frac{2}{1}\text{ A} = -2\text{ A}$ 。可见 $i_C(0) \neq \delta(t)$ ，故 $u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} (-2) dt' = u_C(0_-) = 2\text{ A}$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

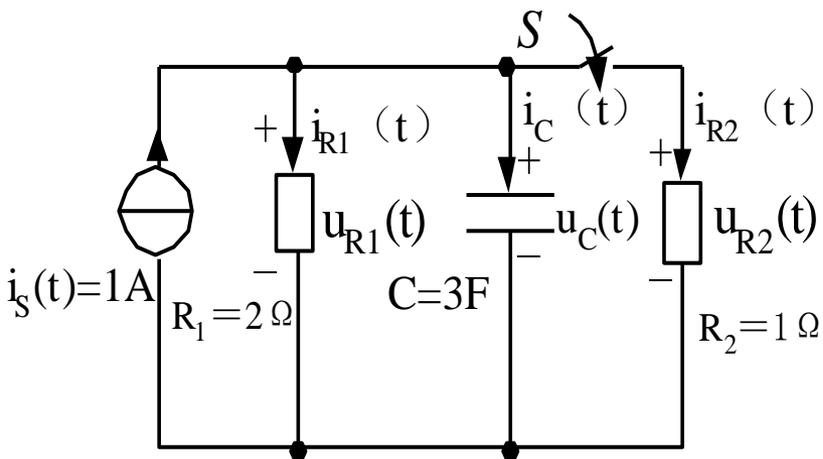


图5.14 例5-2图

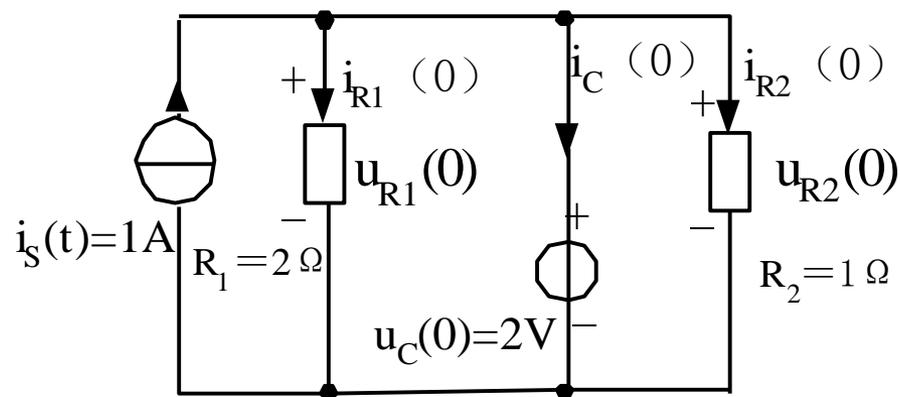


图5.15 例5-2电路在 $t=0$ 时刻的情况

在 $t=\infty$ 时刻，如图5-16所示，电路又进入稳定运行状态，仍有直流激励的情况下电容器继续稳定运行，故相当于开路，因而 $u_C(\infty) = u_{R\text{并}}(\infty) = 1 \times$

$$\frac{1 \times 2}{1+2} V = \frac{2}{3} V。解得$$

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

$$u_C(t) = \frac{2}{3} + \left[2 - \frac{2}{3}\right] e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中， $\tau = R_{\text{并}} C = 2 \text{ s}$ 。

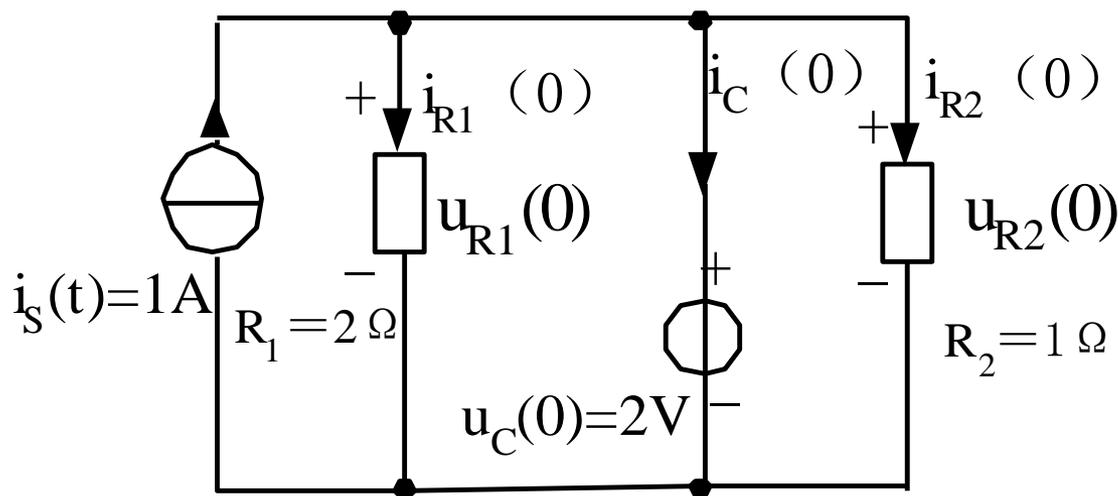


图5.16 例5-2电路在 $t=0$ 时刻的情况

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

【例5-3】如图5-17所示的电路，各参数如图所示。开关S在 $t=0$ 时刻断开，求换路后的响应 $i_L(t)$ 、 $i_2(t)$ 。

【解】在 $t=0$ 之前S是闭合的，电流源 $i_S(t)$ 由于被短路形成闭合回路，与 R_1 、 R_2 、 R_3 、 L 无直接关系， L 中即使有初识储能也会被 R_1 、 R_2 、 R_3 消耗掉，故可知 $i_L(0_-)=0$ ， $i_L(0)=0$ 。

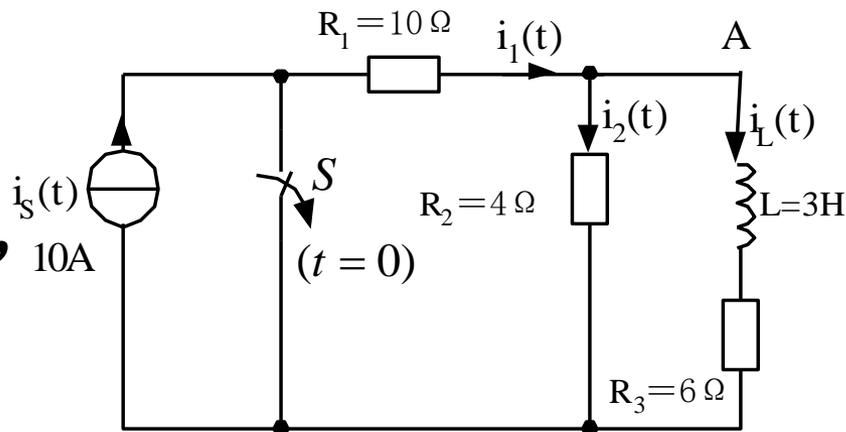


图5.16 例5-3图

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

(1) 求 $i_L(0_+)$ 的值。

在 $t=0$ 时刻 S 未闭合， $i_L(0_+)=0$ ，所以 L 支路中无电流通过，相当于开路。10 A电流通过 R_1 ， R_2 支路，如图5.18所示，在 R_2 上形成的电压降为 $u_{R_2}(0)=40$ V， $u_L(0)=u_{R_2}(0)=40$ V $\neq A\delta(t)$ ，所以 $i_L(0_+)=i_L(0)=i_L(0_-)=0$ 。

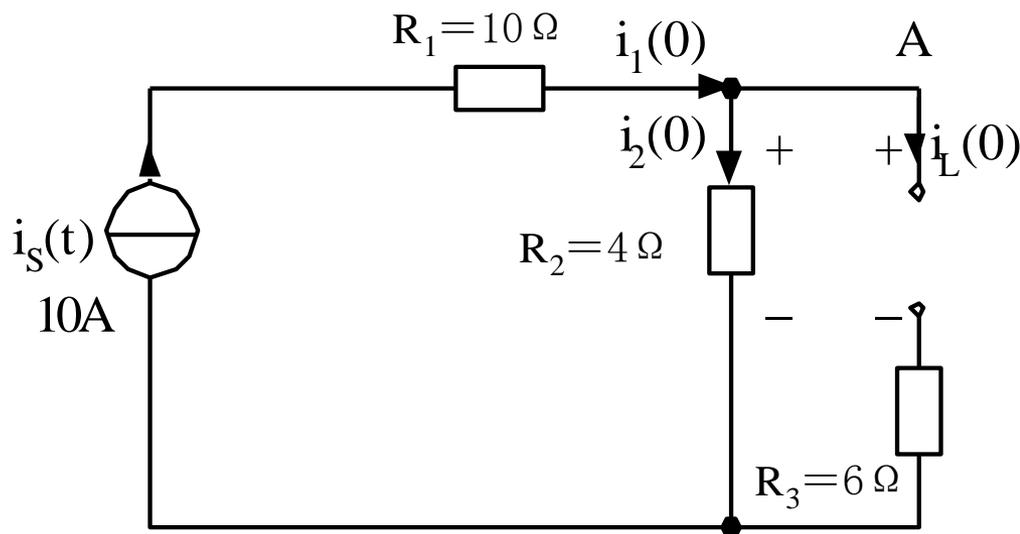


图5.18 例5-3图在 $t=0$ 时刻的情况

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

(2) 求 $i_L(\infty)$ 的值。

在直流电源作用下，电感稳定运行时相当于短路，如图5-19所示，故可解得 $i_L(\infty) = 10 \times \frac{4 \times 6}{4+6} \times \frac{1}{6} \text{ A} = 4 \text{ A}$ 。

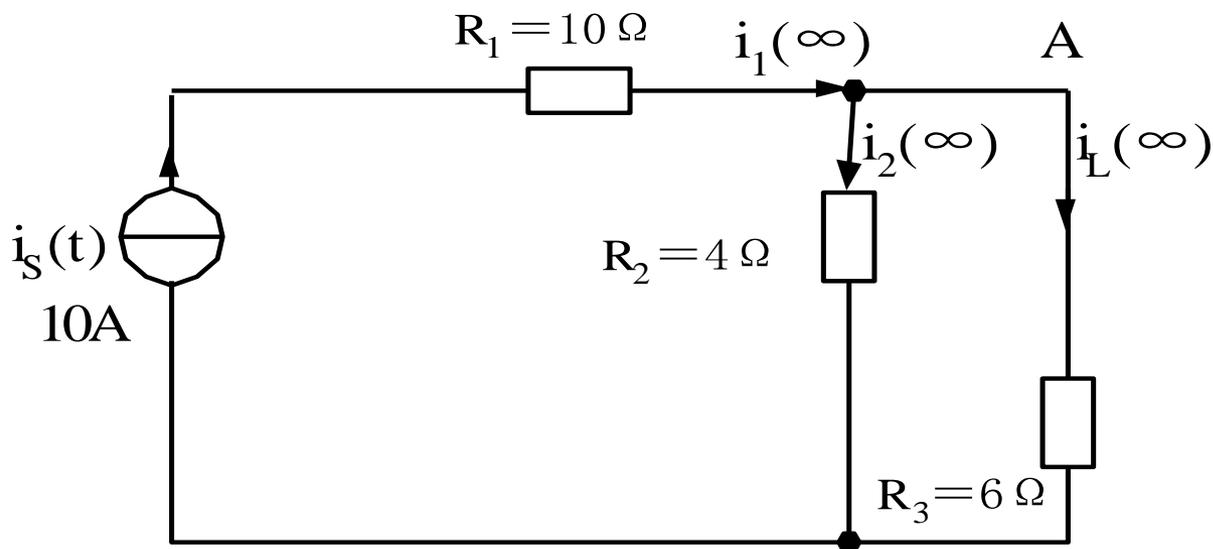


图5.19 例5-3图在 $t=\infty$ 时刻的情况

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.1 三要素法及其一般表达式

(3) 求时间常数 τ 。

将电路中的独立电源置零，则 $i_S(t)$ 与 R_1 组成的支路断开，电路中只有一个储能元件 L 。从 L 两端看过去， $R_{\text{总}}=R_2+R_3$ ，所以 $R_{\text{总}}=6\ \Omega+4\ \Omega=10\ \Omega$ ， $\tau=L/R_{\text{总}}=0.1\times 3\ \text{s}=0.3\ \text{s}$ 。

综上所述可知，
$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 4 + (0 - 4)e^{-\frac{t}{0.3}}\ \text{A} = 4\left(1 - e^{-\frac{t}{0.3}}\right)\ \text{A} (t \geq 0)。$$

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.2 三要素的求取

5.1.3.2.1 $f(0_+)$ 的求取

首先根据题设， $f(0_+)$ 的求取条件及开闭定理求出 $u_C(0_+)$ ， $i_L(0_+)$ 。如果要求的响应为 $i_C(0_+)$ ， $u_L(0_+)$ 及 $u_R(0_+)$ 和 $i_R(0_+)$ ，则要画出 0_+ 时刻的等效电路图。在 0_+ 时刻的电路图中， L 元件用等效直流电源代替，其大小和方向都与 $i_L(0_+)$ 相同； C 元件用直流电压源代替，其极性和大小都与 $u_C(0_+)$ 相同。如例5-3中要求 R_2 支路电流 $i_2(t)$ ，用三要素法先要求 $i_2(0_+)$ 。为此，现画出 0_+ 时刻的等效电路图，如图5.20所示， L 用直流源 $i_L(0_+)$ 代替， $i_L(0_+)=0$ ，相当于开路。所以， $i_2(0_+)=i_1(0_+)=i_S=10\text{A}$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.2 三要素的求取

5.1.3.2.1 $f(0_+)$ 的求取

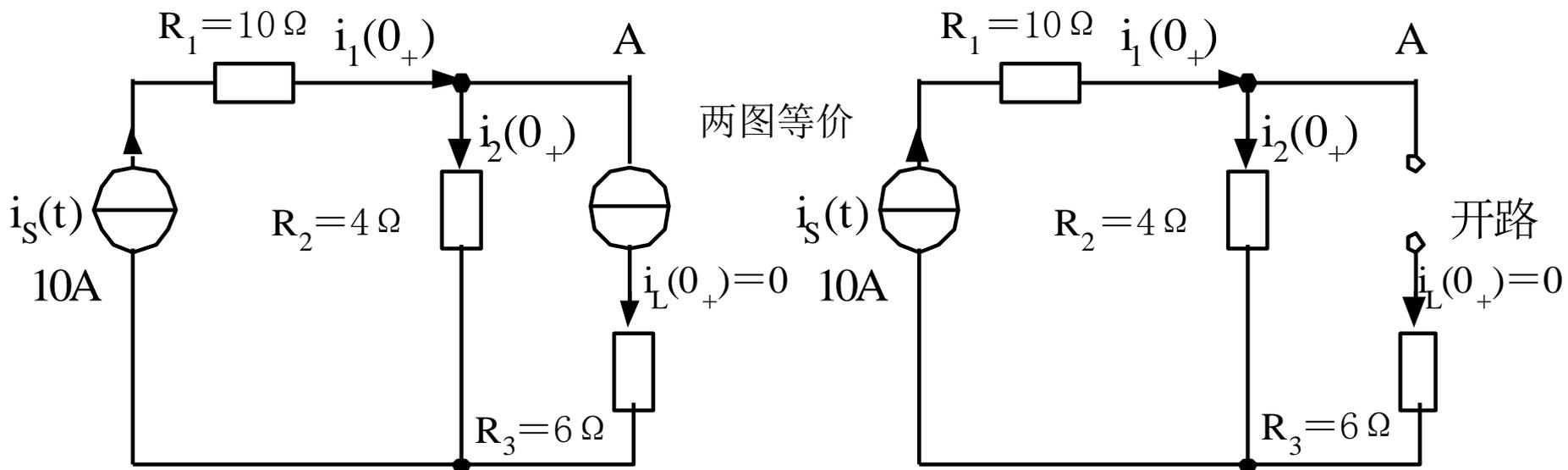


图5.20 例5-3图在 $t=0_+$ 时刻的情况

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.2 三要素的求取

5.1.3.2.2 $f(\infty)$ 的求取

画出 $t=\infty$ ，即电路开闭后又达到稳定运行的电路图，在直流源作用下， L 相当于短路， C 相当于开路。如例5-3， $t=\infty$ 时，电路图如图5.19所示，所以 $i_2=6\text{A}$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.2 三要素的求取

5.1.3.2.3 τ 的求取

在同一电路中处处的支路电压，支路电流的变化规律相同，即 τ 相同。在无受控源电路中，将独立源置零，电流源支路断开，电压源支路短接，剩下 R 、 L 电路或 R 、 C 电路，从等效 L 等两端（或等效 C 等两端）求等效电阻，从等效电阻两端求等效电感 L 等（或等效电容 C 等）。该题 $\tau=0.3$ s，在求 $i_L(t)$ 时求出，

此处不再重复。所以 $i_2(t) = \left[6 + (10 - 6)e^{-\frac{t}{0.3}} \right] \text{A} = \left(6 + 4e^{-\frac{t}{0.3}} \right) \text{A} \quad (t \geq 0)$ 。

在节点B上 $i_1(t) = i_2(t) + i_L(t)$ 。由已知 $i_1(t) = 10 \text{A}$ ， $i_2(t) + i_L(t) = 6 + 4e^{-\frac{t}{0.3}} + 4(1 - e^{-\frac{t}{0.3}}) = 10 \text{A}$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

【例5-4】设有电路如图5.21所示，其中 $e(t) = \sqrt{2} \times 220 \sin(314t + 30^\circ) \text{ V}$ ，已知 $u_C(0_-) = U_0 = 2.02 \text{ V}$ ，求该RC一阶电路的响应。

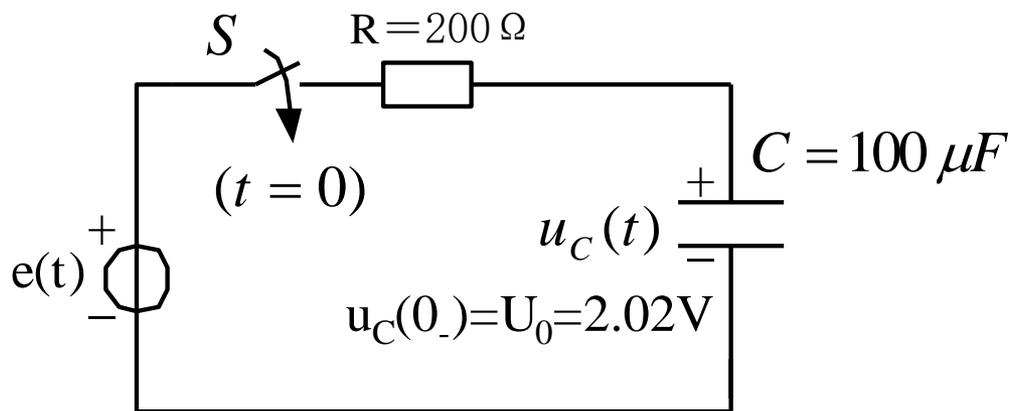


图5.21 例5-4图

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

【解】

微分方程 $RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$

其解 $u_C(t) = u_{Ct}(t) + u_{Cp}(t)$ 或用三要素法:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_{C0+}(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, $\tau = RC = 200 \times 100 \times 10^{-6} \text{ s} = 2 \times 10^{-2} \text{ s}$ 。

$u_C(\infty) = u_{Cp}(t)$, 其函数形式与 $e(t)$ 相同, 令其为 $u_C(\infty) = u_{Cp}(t) = U_{cm} \sin(314t + \varphi_{u_C})$, 故 $u_C(\infty) = U_{cm} \sin \varphi_{u_C}$ 。

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

$u_C(\infty)=u_{Cp}(t)=U_{cm}\sin(314t+\varphi_{u_C})$ 的求法在正弦稳态分析一章中将有相量法的详细介绍。在没有学习相量法之前， $u_C(\infty)=U_{cm}\sin(314t+\varphi_{u_C})$ 也可以用比较系数法来求取。

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{dU_{cm} \sin(\omega t + \varphi_{u_C})}{dt} = \omega U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{u_C})$$

带入微分方程：

$$\omega RC U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{u_C}) + U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_{u_C}) = \sqrt{2} \times 220 \sin(\omega t + \varphi_e) V$$

用 $\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}$ 配项：

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

$$\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2} \left[\frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{uc}) + \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} U_{cm} \sin(\omega t + \varphi_{uc}) \right]$$
$$= \sqrt{2} \times 220 \sin(\omega t + \varphi_e)$$

ωRC 、 ε 与 $\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}$ 有如图5.22所示的三角关系，可得

$$\varphi = \arctan \omega RC = \arctan 6.28$$
$$= 80.95^\circ$$

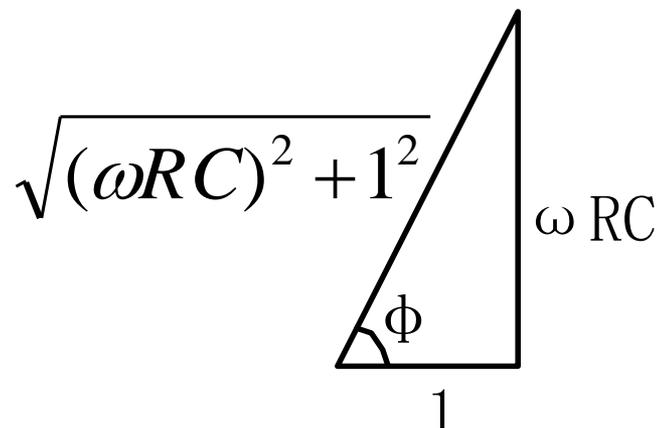


图5.22 三角关系

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2} U_{Cm} [\sin \varphi \cos(\omega t + \varphi_{uC}) + \cos \varphi \sin(\omega t + \varphi_{uC})] \\ & = \sqrt{2} \times 220 \sin(\omega t + \varphi_e) \end{aligned}$$

$$\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2} U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_{uC} + \varphi) = \sqrt{2} \times 220 \sin(\omega t + \varphi_e)$$

$$\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2} U_{Cm} = \sqrt{2} \times 220$$

$$\begin{aligned} U_{Cm} &= \frac{\sqrt{2} \times 220}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} V = \sqrt{2} \times \frac{220}{\sqrt{(314 \times 200 \times 100 \times 10^{-6})^2 + 1^2}} \\ &= \sqrt{2} \times 34.59 V \end{aligned}$$

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时RC一阶电路的响应

由 $\varphi_{uc} + \varphi = \varphi_e$, 可得

$$\begin{aligned}\varphi_{uc} &= \varphi_e - \varphi = 30^\circ - \arctan \omega RC \\ &= 30^\circ - 80.95^\circ = -50.95^\circ\end{aligned}$$

$$u_C(\infty) = u_{Cp}(t) = \sqrt{2} \times 34.59 \sin(314t - 50.95^\circ) \text{ V}$$

$$\begin{aligned}u_C(t) &= u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_{C0+}(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \sqrt{2} \times 34.59 \sin(314t - 50.95^\circ) \\ &\quad + (U_0 + 37.98) e^{-50t} \text{ V} \quad (t \geq 0)\end{aligned}$$

5.1.3 求解一阶电路的三要素法

5.1.3.3 用三要素法求激励为正弦波形时 RC 一阶电路的响应

可见，如果激励为正弦波形时，关键是：

1、求响应的稳定分量或强制分量（用比较系数法，又叫待定系数法）；

2、暂态分量或自由分量中的 $f(\infty)$ 是令稳态分量中的 $t=0$ 而得到的。

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.1 阶跃函数

【复习】

阶跃函数 $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ 可以用来描述电路中开关的动作，又称为开关函数。

【定义】

零状态网络对单位阶跃信号的响应称为单位阶跃响应，简称为阶跃响应。

在图5.23中，激励 $e(t) = \varepsilon(t)$ ， $u_C(0_-) = 0 \text{ V}$ 。

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.1 阶跃函数

微分方程

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = \varepsilon(t)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \text{ V}$$

其特解为 $u_{Cp}(t) = \varepsilon(t)$ ，通解为 $u_{Ct}(t) = ke^{-\frac{t}{RC}}$ ，其中 $k = \varepsilon(t)$ 。

对于阶跃响应可以用一般符号 $s(t)$ 表示，所以 RC 一阶电路 C 元件上的电压的单位阶跃响应为： $s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$ ，其波形如图5.24所示。



图5.23 激励为单位阶跃信号的RC串联一阶电路

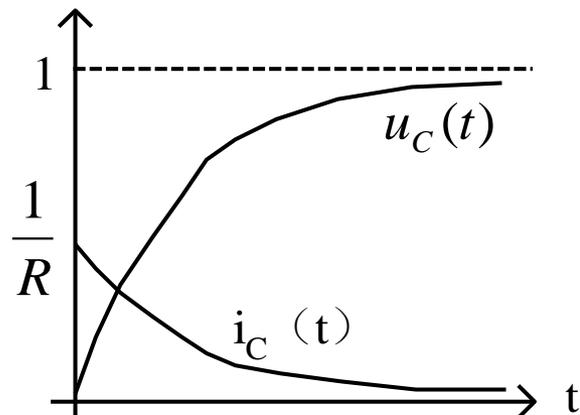


图5.24 电容元件上的单位阶跃响应曲线

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.1 阶跃函数

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \left[0 - \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \right] \varepsilon(t) + C(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \delta(t)$$

$$= \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + C(1 - 1) \delta(t)$$

$$= \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

【复习】

阶跃函数 $\delta(t) = \begin{cases} \text{奇异} & (t = 0) \\ \mathbf{0} & (t \neq 0) \end{cases}$ ，奇异性

$$\int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \mathbf{1}, \quad \delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt。$$

【定义】

零状态电路对单位冲击激励的响应称为单位冲击响应，简称为冲击响应。

在图5.23中，激励 $e(t) = \delta(t)$ ， $u_C(0_-) = \mathbf{0} \text{ V}$ 。

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

微分方程

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = \delta(t)$$

$$u_C(0_-) = 0 \text{ V}$$

$\delta(t)$ 只在 $t=0$ 时刻出现， $t>0$ 时刻 $e(t)=0$ ，电路变成零输入响应。因为 $u_C(0_-)=0 \text{ V}$ ，所以 $u_C(0_-)$ 必不等于零。 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(0) dt$ 。

因为 $u_C(0)=u_C(0_-)=0 \text{ V}$ ，所以 $t=0$ 时， $u_R(0)=\delta(t)$ ， $i_R(0) = \frac{\delta(t)}{R} = i_C(0)$ 。

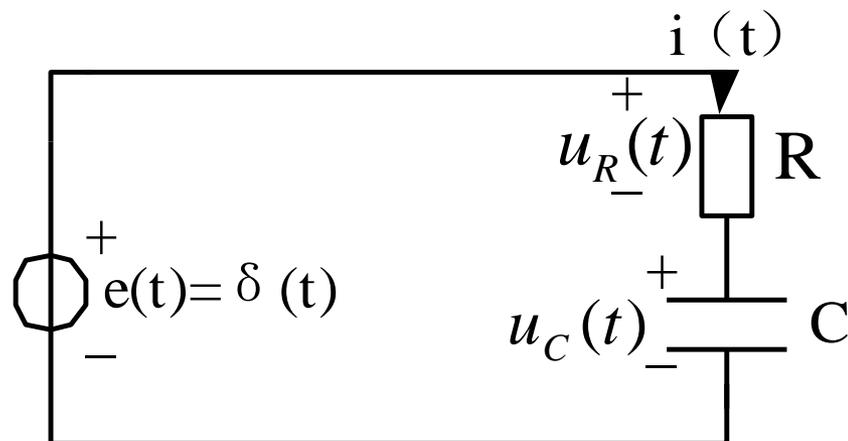


图5.25 激励为单位冲击信号的RC串联一阶电路

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

故 $u_C(0_+) = 0 + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \frac{\delta(t)}{R} dt = \frac{1}{RC} V$ 。 $t > 0$ 时刻，
有 $u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$ ($t > 0$) 或 $u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$ ，
其曲线如图5.26所示。

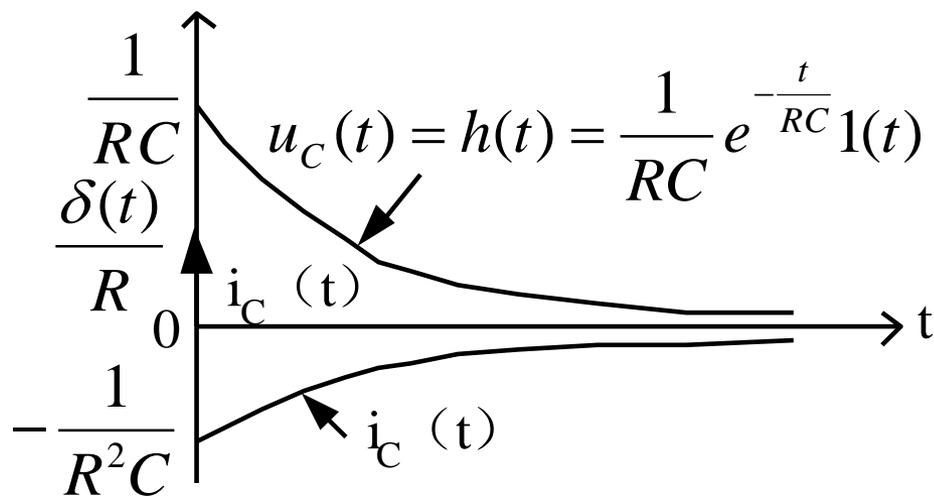


图5.26 RC串联电路对单位冲击响应曲线

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

$$\begin{aligned}i_C(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{1}{RC} \frac{-1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + C \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \delta(t) \\ &= -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + \frac{1}{R} \delta(t)\end{aligned}$$

冲击响应一般也可以用 $h(t)$ 表示，所以 RC 一阶电路 u_C 的冲击响应为 $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$ 。

冲击响应与阶跃响应的关系为：同一电路中的同一变量其冲击响应与阶跃响应的关系式 $h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ ，与 $\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ 相似。

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

例如图5.23和图5.25是同一电路，求的响应都是 $u_C(t)$ ，前者激励电压源是 $\varepsilon(t)$ ，后者的激励电压源是 $\delta(t)$ ，阶跃响应 $s(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$ 。

$$\begin{aligned}\frac{ds(t)}{dt} &= -\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) + (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t) \\ &= \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) + (1 - 1)\delta(t) \\ &= \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) = h(t)\end{aligned}$$

故得证。同理图5.23中的电容电流求导也可以得到图5.25中的电容电流。

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

【例5-5】求图5.27中的 $i_L(t)$ ，设 $i_L(0_-)=0$ A， $i_S(t)=\delta(t)$ ，求 $i_L(t)$ 的冲击响应。

【解】

$i_L(0)=i_L(0_-)=0$ A，所以 $t=0$ 时刻 $\delta(t)$ 作用时 L 支路相当于断开。 $i_S(t)=\delta(t)$ 电流从 R_1 及 R_2 串联支路上通过。故 $u_R(0)=R\delta(t)$ ，而 $u_L(0)=u_R(0)=R\delta(t)$ ，

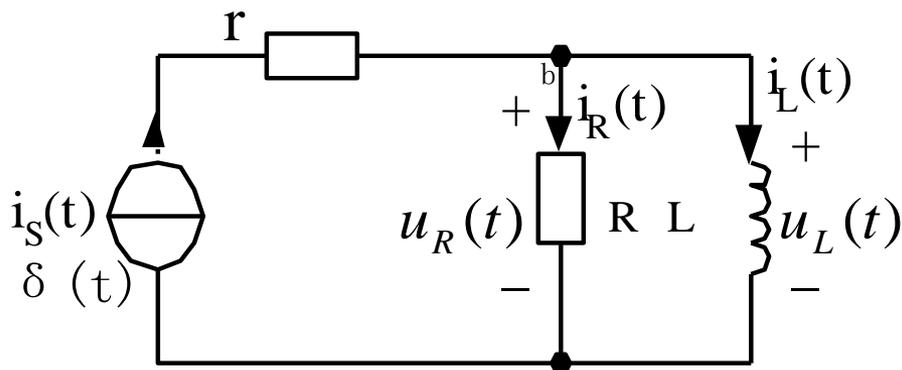


图5.27 例题5-5图

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

故

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(0) dt = 0 + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} R\delta(t) dt = \frac{R}{L}$$

$t > 0$ 以后 $i_S(t) = 0$ ，电路成为零输入， $i_L(t)$ 为零输入响应。

由 $i_S(t) = 0$ 可知 R_1 支路断开，则 $\tau = GL = \frac{R}{L}$ 。

$$i_L(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)$$

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

或

$$\begin{aligned}u_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t)}{dt} = L \frac{R}{L} \left(-\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) + L \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \delta(t) \\ &= -\frac{R^2}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) + R\delta(t)\end{aligned}$$

其中， $i_L(t)$ ， $u_L(t)$ 的曲线如图5-28及图5-29所示。

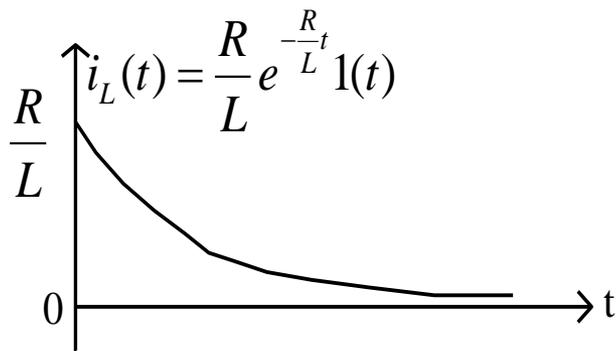


图5.28 $i_L(t)$ 曲线

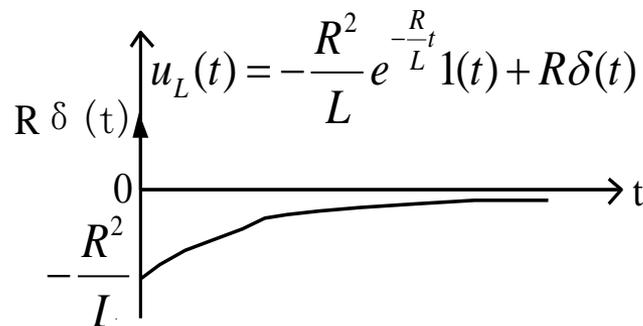


图5.29 $u_L(t)$ 曲线

5.1.4 阶跃响应与冲击响应

5.1.3.2 冲击响应

如果要求 $i_s(t)=\varepsilon(t)$ 作用下的零状态电路的响应 $i_L(t)=s(t)$ ，则可以将上面求出的 $i_L(t)=h(t)$ 积分一次。

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{0_-}^t h(t) dt = \int_{0_-}^t \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \varepsilon(t) dt = \varepsilon(t) \frac{R}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}t} dt \\ &= -\varepsilon(t) \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right) = (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

对原电路用三要素法求解其阶跃响应如下：

$$\begin{cases} i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \\ \tau = GL = \frac{L}{R} \\ i_L(\infty) = \varepsilon(t) \end{cases}$$

解得 $i_L(t) = \varepsilon(t) + [0 - \varepsilon(t)]e^{-\frac{R}{L}t} = (1 - e^{-\frac{R}{L}t})\varepsilon(t)$

5.1.5 线性与定常

在如图5.30所示的RC并联电路中，已知 $i_s(t)=\varepsilon(t)$ （如图5.31所示），则RC并联电路对激励的响应如图5.32所示。

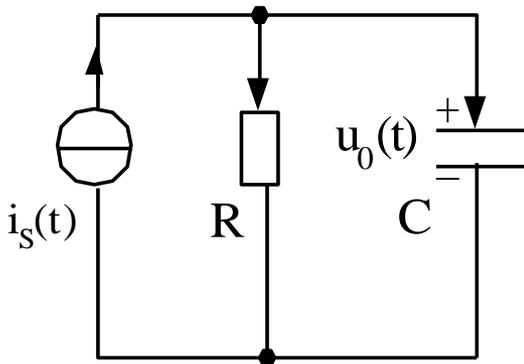


图5.30 RC并联电路

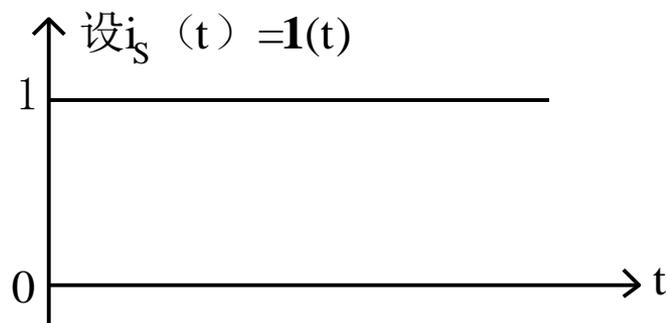


图5.31 i_s 的曲线

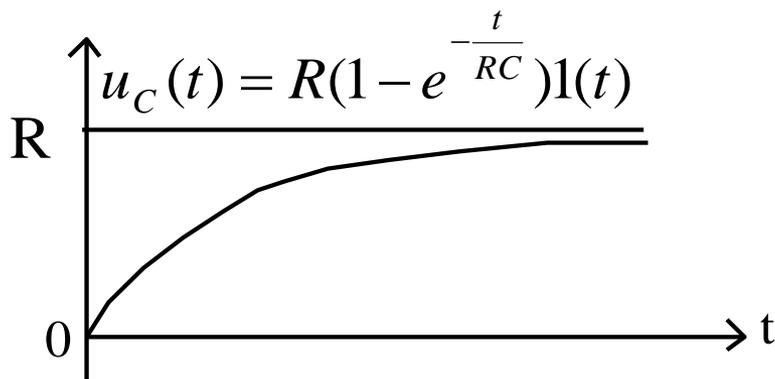


图5.30 RC并联电路对 $i_s(t)=\varepsilon(t)$ 的零状态响应 $u_C(t)$ 的曲线

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

零状态响应的线性性质包括可加性与齐次性。

(1) 可加性

设 $i_S(t)$ 为两个电流源之和，即 $i_S(t)=i_{S1}(t)+i_{S2}(t)$ ，并设 $u_{C1}(t)$ 为电路对 $i_{S1}(t)$ 的响应， $u_{C2}(t)$ 为电路对 $i_{S2}(t)$ 的响应。

因为 $u_{C1}(t)$ 、 $u_{C2}(t)$ 均为电路的解，故都应该满足微分方程，故可得以下方程组。

$$\begin{cases} C \frac{du_{C1}(t)}{dt} + Gu_{C1}(t) = i_{S1}(t), u_{C1}(0) = 0 \\ C \frac{du_{C2}(t)}{dt} + Gu_{C2}(t) = i_{S2}(t), u_{C2}(0) = 0 \end{cases}$$

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

$$C \left[\frac{du_{C1}(t)}{dt} + \frac{du_{C2}(t)}{dt} \right] + G[u_{C1}(t) + u_{C2}(t)] = i_{S1}(t) + i_{S2}(t)$$

其中， $u_{C1}(0)=u_{C2}(0)=0$ 。

因为 $\frac{df}{d}$ 微分算子为线性算子，所以可得

$$\begin{cases} C \frac{d[u_{C1}(t) + u_{C2}(t)]}{dt} + G[u_{C1}(t) + u_{C2}(t)] = i_S(t) \\ u_{C1}(0) = u_{C2}(0) = 0 \end{cases}$$

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

令 $u_C(t)$ 为电路对 $i_S(t)=i_{S1}(t)+i_{S2}(t)$ 的响应，则有

$$C \frac{du_C(t)}{dt} + Gu_C(t) = i_S(t)$$

其中， $u_C(0)=0$ 。

将式(5-17)与式(5-18)相对照，根据微分方程解的唯一性定理可知 $u_C(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)$ ，即：多个独立源同时作用于一线性电路时，其零状态响应为各个独立源单独作用时产生的叠加。

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

(2) 齐次性

设有任意常数 α ，当 $i_S(t)$ 作用时电路的零状态响应为 $u_C(t)$ ，则 $\alpha i_S(t)$ 作用时电路的零状态响应为 $\alpha u_C(t)$ 。

【证明】

$$\begin{cases} C \frac{du_C(t)}{dt} + Gu_C(t) = i_S(t) \\ u_C(0) = 0 \end{cases}$$

两式等号左右同时乘以 α 有：

$$\begin{cases} C \frac{d\alpha u_C(t)}{dt} + G\alpha u_C(t) = \alpha i_S(t) \\ \alpha u_C(0) = 0 \end{cases}$$

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

设 $y(t)$ 为电路对 $ai_s(t)$ 的响应，则 $y(t)=au_C(t)$ ，得证。

因为 $u_C(t)$ 或 $y(t)$ 对 $i_s(t)$ 满足齐次性和可加性，所以线性电路的零状态响应是激励的线性函数。而且，只要电路是线性电路，不管是定常的还是时变的，以上结论都能适用。

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

(3) 线性定常电路的定常特性与延迟算子

将在 $t=0$ 时刻加上的激励记为 i_0 ，将在 $t=0$ 时刻为零状态的电路对 i_0 的响应记为 $z_0(i_0)$ ，在上述电路中 $z_0(i_0)$ 的具体函数表达式是 $u_C(t)$ 。从电路可知有

$$\begin{cases} C \frac{du_C(t)}{dt} + Gu_C(t) = i_0(t) \\ u_C(0) = 0 \end{cases}$$

若将 $i_0(t)$ 向后延迟 τ 秒，波形不变，起始时刻由 $t=0$ 变成 $t=\tau$ ，延迟 τ 秒，波形不变的这个波用 $i_\tau(t)$ 表示，则 $i_\tau(t) = i_0(t-\tau)$ ，如下图5.33所示。

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

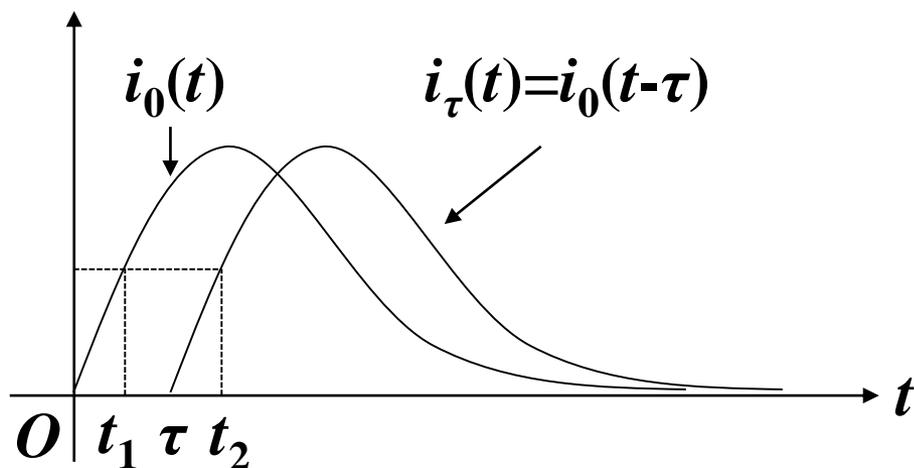


图5.33 $i_0(t)$ 与 $i_\tau(t)$ 的曲线

【证明】因为 $i_\tau(\tau+t_1)=i_0(t_1)$ ，令 $t=\tau+t_1$ ，则 $t_1=t-\tau$ ，代入上式得 $i_\tau(t)=i_0(t-\tau)$ ，得证。

同一电路，同一变量对 i_τ 的响应与对 i_0 的响应，直观上我们可以判定是对 i_0 的响应 $u_C(t)$ 向后延迟 τ 秒，即 $u_C(t-\tau)$ 。

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

【证明】假设电路对 $i_\tau(t)$ 的响应为 $u_\tau(t)$ ，可得以下方程。

$$\begin{cases} C \frac{du_\tau(t)}{dt} + Gu_\tau(t) = i_\tau(t) \\ u_\tau(0) = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad 0 < t \leq \tau$$

$i_\tau(t)$ 还没有出现，即 $i_\tau(t)=0$ ，又有 $u_\tau(t)=0$ 。由因果关系，可知 $u_\tau(t)=0$ 。

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

(2) $t \geq \tau$

将响应记为 $y(t)$ ，可得。

$$\begin{cases} C \frac{dy(t)}{dt} + Gy(t) = i_{\tau}(t) \\ y_{\tau}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0 \end{cases}$$

将式(5-22)与式(5-21)相比较，并将式(5-21)中的 t 都用 $t-\tau$ 代替，可得

$$\begin{cases} C \frac{du_{\tau}(t-\tau)}{dt} + Gu_{\tau}(t-\tau) = i_0(t) \\ u_C(\tau) = 0 \end{cases}$$

5.1.5 线性与定常

5.1.5.1 零状态响应的线性性质

前面我们已经将 $i_0(t-\tau)$ 定义为 $i_\tau(t)$ ，根据常微分方程解的唯一性定理有 $i_\tau(t)=i_0(t-\tau)$ ，可得

$$\begin{cases} y(t) = u_C(t - \tau) \\ y_\tau(\tau) \Big|_{\tau=0} = u_C(0) = 0 \end{cases}$$

$i_0(t)$ 延迟 τ 时，写成 $i_\tau(t)$ ，其响应也同样延迟 τ 秒。所以 $y(t)=u_\tau(t)=u_C(t-\tau)$ 。其响应曲线如图5.34所示。

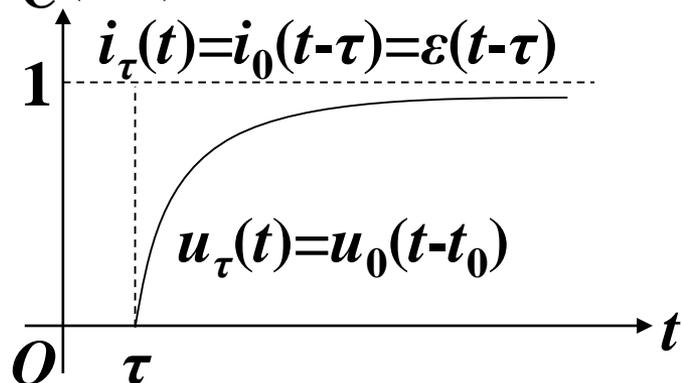


图5.34 同一RC电路对延时单位阶跃 $i_S(t-\tau)\epsilon i_S(t-\tau)$ 的曲线

5.2 二阶电路

【定义】

如果电路中有两个独立的储能元件，则对一个变量列出的电路方程为二阶微分方程，所以有两个独立的储能元件的动态电路就称为二阶电路。

下面的分析以 RLC 串联电路为例。因为 L 和 C 分别是两个独立的储能元件，所以 RLC 串联电路以及 GCL 并联电路均为典型的二阶电路。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

有RLC串联电路如图5.35所示，RLC均为线性定常（正值）元件，设 $i_L(0_-)=I_0$ ， $u_C(0_-)=U_0$ 。

在 $t \geq 0$ 电路中有KCL方程及KVL可列出如下方程：

$$\begin{cases} i_L(t) = i_R(t) = i_C(t) \\ u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0 \end{cases}$$

由元件的 u - i 特性可列出如下方程：

$$\begin{cases} u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, i_L(0_-) = I_0 \\ u_R(t) = Ri_R(t) \\ i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, u_C(0_-) = U_0 \end{cases}$$

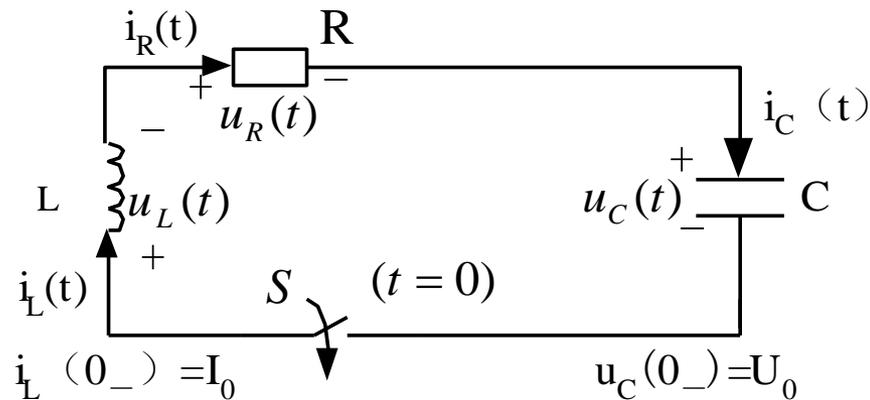


图5.34 RLC串联电路的零输入响应

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

将KCL、KVL和元件特性方程整理列出以 $u_C(t)$ 为变量的微分方程为：

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0 \\ u_C(0_-) = U_0, i_L(0_-) = I_0 \end{cases}$$

该微分方程是一个常系数常微分方程，而且是齐次的，因而它只有通解，设为 $U_{Ct}(t) = Ae^{st}$ 。 $U_{Ct}(t) = Ae^{st}$ 是微分方程的解，因而应满足原微分方程。

把 $\frac{du_C(t)}{dt} = sAe^{st}$ ， $\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = s^2 Ae^{st}$ 带入原微分方程，得

$$LCs^2 Ae^{st} + RCsAe^{st} + Ae^{st} = 0$$

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

化简，得

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0$$

该二次方程称为原二阶齐次微分方程的特征方程，其根为

$$s_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

令 $\frac{R}{2L} = \alpha$ ， $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ，则上式变成

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

由于 $\frac{R}{2L}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的相对大小不同，所以 $\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ 可以有如下三种情况。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

(1) 当 $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, 即 $\alpha > \omega_0$, 也即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, $\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ 为正实数。所以 $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, s_1 与 s_2 为不相等的两个负实数, 且 $|s_1| < |s_2|$ 。

所以通解 $U_{Ct}(t) = Ae^{st}$ 应由两项组成, 即 $u_{Ct}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} (t \geq 0)$ 。 A_1 与 A_2 两个积分常数通过起始条件来求得。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

已知 $u_C(0_-)=U_0$ ，故 $u_C(0)=u_C(0_-)=U_0$ ，在 $t=0$ 时刻电路中无冲击电流出现，所以 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ ，同理 $i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0$ 。则

$$C \frac{du_{Ct}(t)}{dt} \Big|_{0_+} = i_C(0_+) = i_L(0_+) = I_0$$

$$\frac{du_{Ct}(t)}{dt} \Big|_{0_+} = \frac{I_0}{C}$$

$$u_{Ct}(t) \Big|_{t=0} = A_1 + A_2 = U_0$$

$$\frac{du_{Ct}(t)}{dt} \Big|_{0_+} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = \frac{I_0}{C}$$

为分析简便、合理，可设 $I_0=0$ ，则 $s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0$ 。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

联立式(5-23)和式(5-24), 解得

$$A_1 = -\frac{s_2 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2}, A_2 = \frac{s_1 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2}$$

$$u_{Ct}(t) = -\frac{s_2 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_1 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} (t \geq 0)$$

由 $|s_1| < |s_2|$, 则 $s_1 - s_2 > 0$, 可得出以下结论。

若 $-\frac{s_2 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} > 0$, 则衰减慢;

若 $\frac{s_1 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} < 0$, 则衰减快。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$u_{Ct}(t)$ 的波形如图5.36所示。

可见， $u_{Ct}(t)$ 是以 U_0 为起始值单调衰减的， $t=\infty$ ， $u_{Ct}(\infty)=0$ 。

$$\begin{aligned}i_C(t) &= C \frac{du_{Ct}(t)}{dt} = C \frac{-s_2 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + C \frac{s_1 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \\ &= C \frac{-s_1 s_2 U_0}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + C \frac{s_1 s_2 U_0}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}\end{aligned}$$

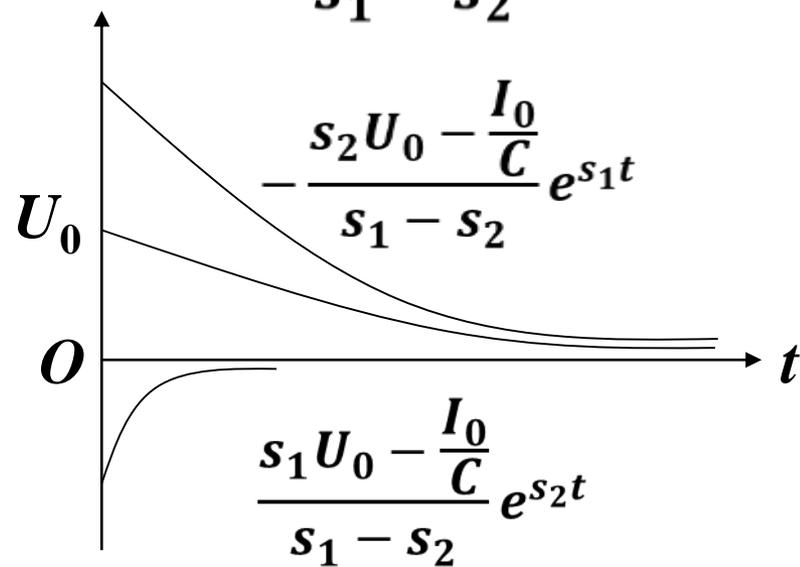


图5.36 RLC串联电路零输入响应 $u_C(t)$ 的两个分量曲线图

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

由于

$$s_1 s_2 = \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) \left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}\right) = \frac{1}{LC}$$

$$\text{故 } i_C(t) = \frac{-U_0}{L(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + \frac{U_0}{L(s_1 - s_2)} e^{s_2 t} \quad (t \geq 0)$$

其波形如图5.37所示。

由波形可知 $i_C(t)$ 从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 经历了一个由小到大，由大到小最后趋近于0的过程，其中必有至少一个最大值。 $i_{Cm}(t)$ 其对应的时刻为 t_m ，可用 $\frac{di_C(t)}{dt} = 0$ 式来求 t_m 。

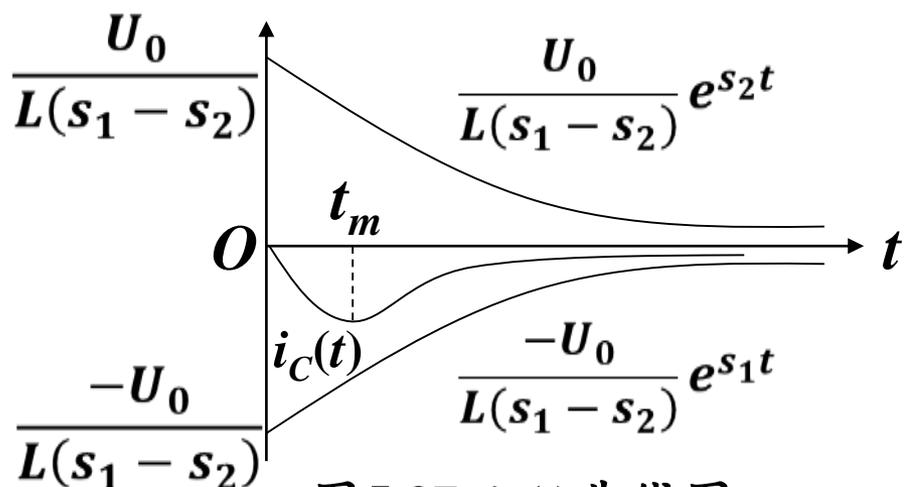


图5.37 $i_C(t)$ 曲线图

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$i_C(t)$ 曲线的物理解释，如图5.38及图5.39所示。

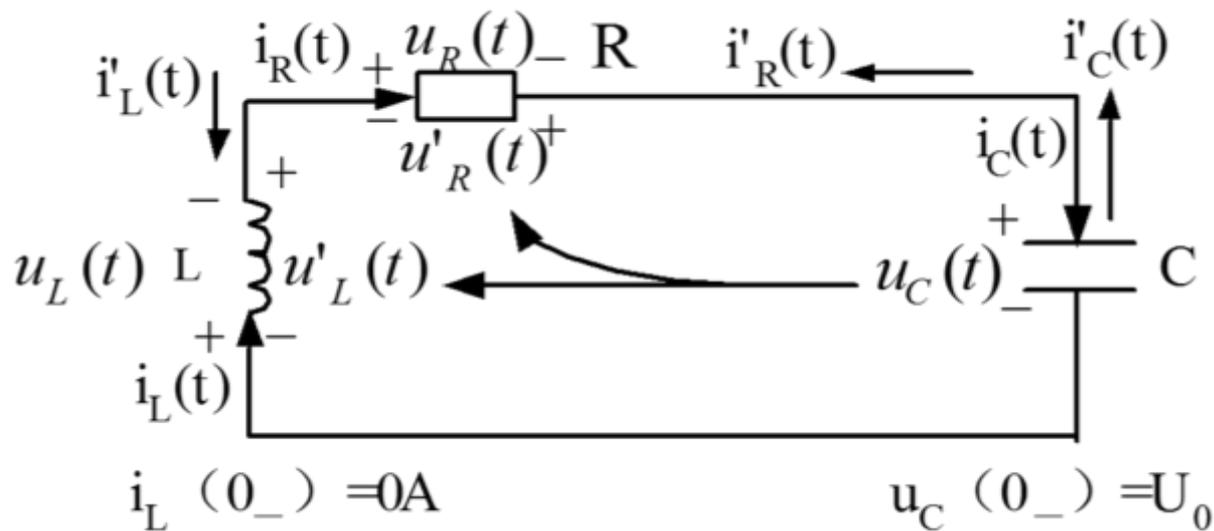


图5.38 RLC串联电路零输入响应（在 $u_C(0_-) = U_0$ ， $i_L(0_-) = 0$ 的条件下）的物理过程（ $0 < t \leq t_m$ 时）

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$i_C(t)$ 曲线的物理解释，如图5.38及图5.39所示。

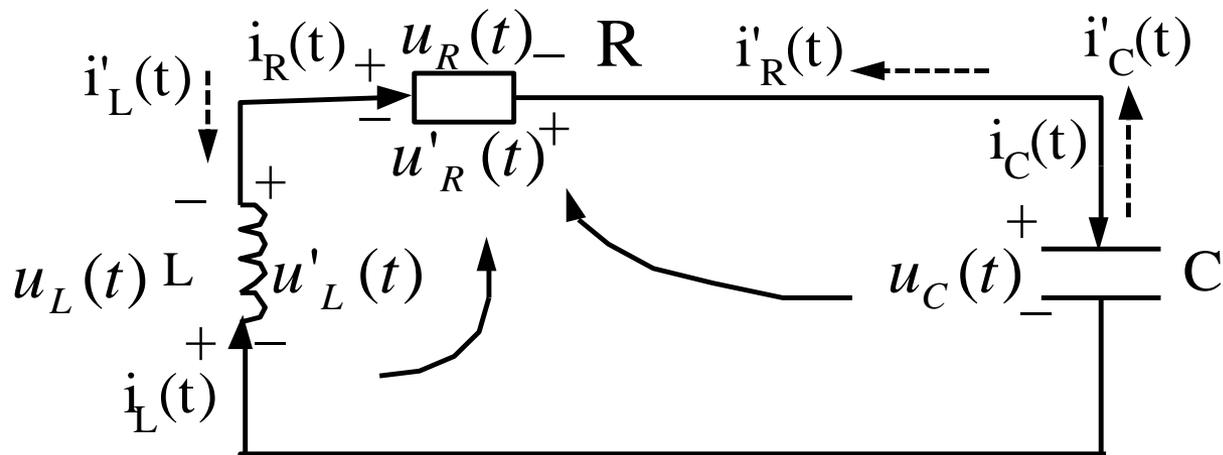


图5.39 RLC 串联电路零输入响应（在 $u_C(0_-)=u_0$,
 $i_C(0_-)=0$ 的条件下）的物理过程（ $t \geq t_m$ 时）

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$0 \leq t \leq t_m$ 之间，电容器对 R 及 L 元件放电电流为 $i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ ， $i'_C(t)$ 的实际方向 $i'_C(t)$ 与假定方向相反，如虚线所示。

由于 $\frac{di'_C(t)}{dt} > 0$ ， $i'_L(t) = i'_C(t)$ ， $i'_L(t)$ 的方向与 $u_L(t)$ 的假定正向相反，故 $u_L(t)$ 的真实正向与 $u'_L(t)$ 与假定正向相反。因而 $u_L(t) = -\frac{di'_C(t)}{dt} < 0$ 。

在 $t \geq t_m$ 以后，电容器仍然放电，由于放电过程中电阻始终消耗能量，所以放电电流越来越小。

因为 $\frac{du_C(t)}{dt} < 0$ 且 $\frac{di'_C(t)}{dt} < 0$ ， $\therefore i_C(t)$ 仍然为负值，真实方向仍然如 $i'_C(t)$ ，但 $\frac{di'_C(t)}{dt} < 0$ ， $i'_L(t) = i'_C(t)$ ， $\therefore L \frac{di'_C(t)}{dt} < 0$ ， $u_L(t) = -L \frac{di'_L(t)}{dt} > 0$ 。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

此时 $u'_R(t)$ 的真实方向仍然与假定方向相反，而 $u_L(t)$ 的真实方向与假定方向一致，电感器将 t_m 以前吸收的能量放出来，电场能量与磁场能量最后均消耗尽，电流 $i_C(t)$ 最后为0，电容电压 $u_C(t)$ 最后为0。

所以当 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，电容电压是随时间作单调衰减的。

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时，称为过阻尼情况。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

(2) 当 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 即 $\alpha > \omega_0$ 时, $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ 为虚数。

所以 $s_1 s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ 为一对共轭复数,

设 $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_d$ 。

ω_0 , ω_d , α 三者的关系可以用直角三角形表示, 如图5.40所示。

由于 $s_1 \neq s_2$, 故 $u_{Ct}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ 仍然适用,
即 $u_{Ct}(t) = -\frac{s_2 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_1 U_0 - \frac{I_0}{C}}{s_1 - s_2} e^{s_2 t}$ 仍然适用。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{2j\omega_d} [\alpha(e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) + j\omega_d(e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})]$$

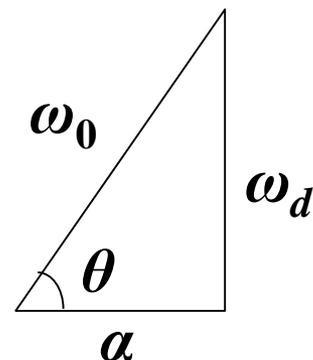


图5.34 衰减系数 α 、衰减振荡角频率 ω_d 与固有频率 ω_0 之间的关系

将 $s_1 = -\alpha + j\omega_d$ ， $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ ，带入并进行整理得出以下结果。

$$\begin{aligned} u_{ct}(t) &= \frac{-(-\alpha - j\omega_d)U_0}{(-\alpha + j\omega_d) - (-\alpha - j\omega_d)} e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + \frac{-(-\alpha + j\omega_d)U_0}{(-\alpha + j\omega_d) - (-\alpha - j\omega_d)} e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \\ &= \frac{(\alpha + j\omega_d)U_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + \frac{(-\alpha + j\omega_d)U_0}{2j\omega_d} e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} \\ &= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{2j\omega_d} [(\alpha + j\omega_d)e^{j\omega_d t} + (-\alpha + j\omega_d)e^{-j\omega_d t}] \\ &= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{2j\omega_d} [\alpha(e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}) + j\omega_d(e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})] \end{aligned}$$

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$\begin{aligned} &= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\omega_d} \left[\alpha \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} + j\omega_d \frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2j} \right] \\ &= \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{\omega_d} \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}} \sin \omega_d t + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}} \cos \omega_d t \right] \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 e^{-\alpha t} (\sin \omega_d t + \theta) \end{aligned}$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u_C(0) = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 \sin \theta = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 \frac{\omega_d}{\omega_0} = U_0$$

$$\text{当 } t=\infty \text{ 时, } u_C(\infty) = 0。$$

当 $0 \leq t < \infty$ 时, $u_{Ct}(t)$ 是一个幅值的包络线作指数衰减的正弦函数。其衰减系数为 α , 衰减角频率为 ω_d 。即 $u_{Ct}(t)$ 边振荡边衰减, 最后直至 0。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$i_C(t) = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)} e^{s_1 t} - e^{s_2 t}$$

将 $s_1 = -\alpha + j\omega_d$, $s_2 = -\alpha - j\omega_d$, 代入并进行整理得,

$$i_C(t) = \frac{U_0 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} - e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}}{-L\omega_d \cdot 2j} = \frac{U_0}{L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \pi)$$

(3) 当 $\alpha = \omega_0$ 时, $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 0$ 。

所以, $s_{1,2} = -\alpha$ 为重根 (即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, s_1 、 s_2 为重根)。

其微分方程的解应修改如下。

$$u_{Ct}(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 t e^{s_1 t} = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 t e^{-\alpha t} (t \geq 0)$$

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

积分常数 A_1 , A_2 仍然要根据起始条件 $u_C(0_+) = U_0$ 及 $\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{0_+} = \frac{i_L(0_+)}{C} = 0$ 来确定。

由 $u_C(t)|_{0_+} = A_1 = U_0$, $\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{0_+} = -\alpha A_1 + A_2 = 0$ 可得。 $A_2 = \alpha A_1 = \alpha U_0$, 故

$$u_{Ct}(t) = U_0 e^{-\alpha t} + \alpha U_0 t e^{-\alpha t} = (1 + \alpha t) U_0 e^{-\alpha t} (t \geq 0)$$

$u_{Ct}(t)$ 随时间变化的波形仍然是单调衰减曲线, 且介于 $\alpha > \omega_0$ 和 $\alpha < \omega_0$ 的两根曲线之间, 如图5.45曲线

③所示。如果R的值变成 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 则曲线为①; 如

果R的值变成 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, 则曲线为②。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

可见 $\alpha=\omega_0$ 的曲线③介于曲线①与②之间。因此

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($\alpha=\omega_0$ 时) 称为临界状态或临界阻尼, 而

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($\alpha > \omega_0$) 称为过阻尼, $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ($\alpha < \omega_0$)

称为欠阻尼。相对于衰减振荡角频率 ω_d 而言, ω_0 称为固有振荡角频率。

(4) 当 $\alpha = 0$ 时, 即 $R=0$ 时, $s_{1,2}=\pm\omega_0$ 。

电路中无电阻, 因而无耗, 故电容器放电时, 电感器充电, 电感器放电时, 电容器充电。电场能量, 磁场能量不断的转换形成等幅振荡, 其波形如图5.46所示。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

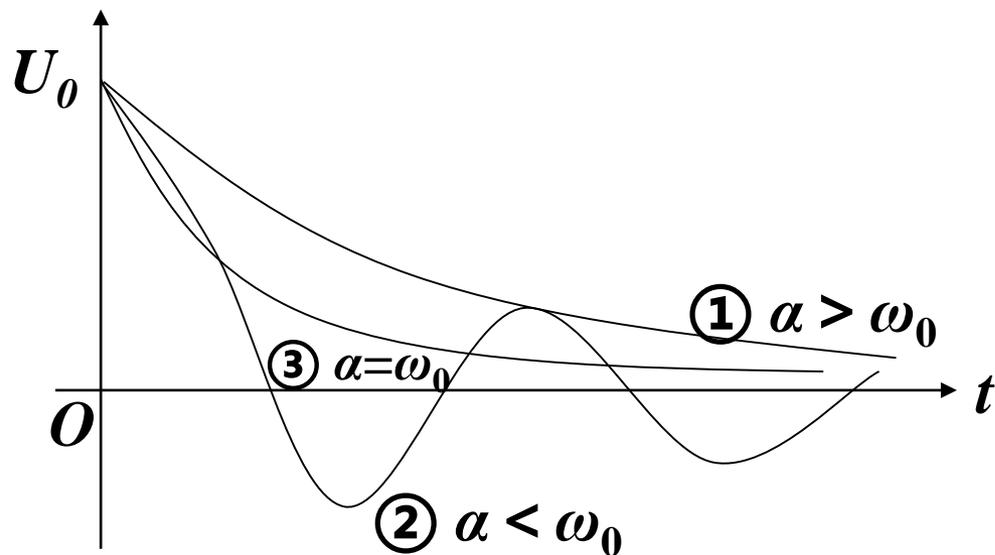


图5.45 u_{Ct} 的曲线

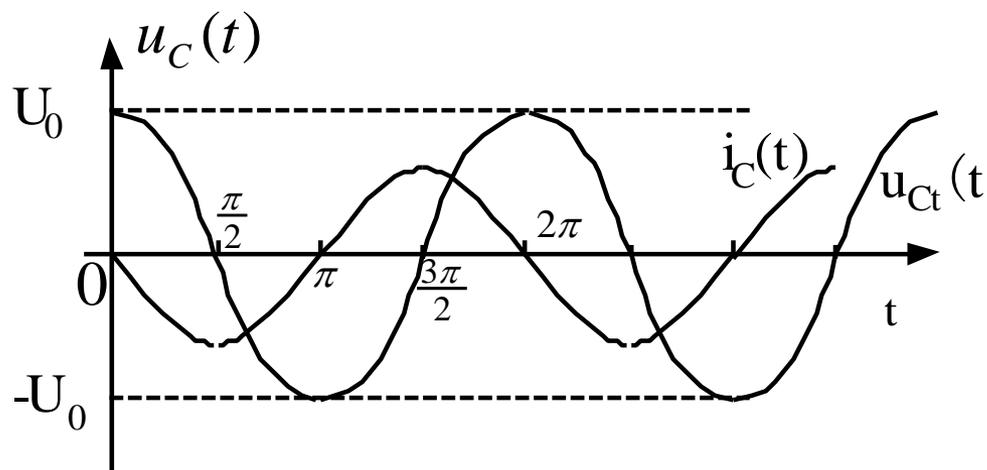


图5.46 u_{Ct} 与 i_C 的曲线

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

通过以上的分析，我们发现RLC串联电路的零输入响应的波形取决于 R 与 $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的相对大小，及 R 的有无。如果 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，则电路属于过阻尼情况； $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 属于欠阻尼情况； $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 属于临界阻尼情况， $R=0$ 属于无阻尼情况，而这四种情况又可以用特征方程的特征根或电路的固有频率 s 的不同来表征，知道了 $s_{1,2}$ 在复平面上的分布则可定性确定零输入响应随时间变化的波形及函数表达式。由于 $R > 0$ ，故 $\alpha = \frac{R}{2L} > 0$ ，则 $-\alpha < 0$ ， $-\alpha$ 总在负实轴上。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的过阻尼情况, $s_{1,2}$ 为不相等的负实数;

(2) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的欠阻尼情况, $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ 为一对共轭复数;

(3) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 的临界阻尼情况, $s_1 = s_2 = -\alpha$ 为重根;

(4) $R = 0$ 的无阻尼情况, $s_{1,2} = \pm j\omega_d$ 为一对共轭虚根。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

【例5-6】如图5.66所示电路原已达到稳态，在 $t=0$ 时开关断开。已知 $R_1=R_2=3\ \Omega$ ， $L_1=0.5\ \text{H}$ ， $C=0.25\ \text{F}$ ， $U_S=6\ \text{V}$ ，求 $t>0$ 的响应 $u_C(t)$ ， $i_L(t)$ 。

【解】

$t=0$ 断开开关S，以 $u_C(t)$ 为变量列写微分方程：

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + R_2 C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

带入元件参数整理 $\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 6 \frac{du_C(t)}{dt} + 8u_C(t) = 0$

在 $t<0$ 时，有 $i_L(0_-)=0$ ， $u_C(0_-)=\frac{U_S}{R_1+R_2} R_2 = \frac{6}{6} \times 3=3$

V。

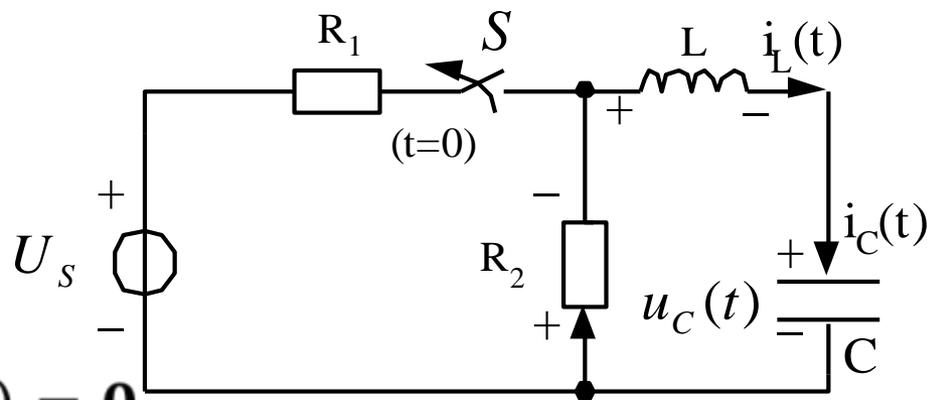


图5.66 例5-6电路图

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

断开开关时电路中无冲击电流或冲击电压出现，
则有 $i_L(0_+) = 0$ ， $u_C(0_+) = 3 \text{ V}$ ， $C \frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{0_+} = i_L(0_+) = 0$ 。

故可得 $\frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{0_+} = 0$ 。

微分方程的特征方程为 $s^2 + 6s + 8 = 0$ ，解得 $s_1 = -2$ ，
 $s_2 = -4$ 。故

$$\begin{aligned} u_C(t) &= A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} (t > 0) \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= -2A_1 e^{-2t} + (-4)A_2 e^{-4t} \\ \begin{cases} u_C(0_+) = A_1 + A_2 \\ \frac{du_C(t)}{dt} \Big|_{0_+} = 2A_1 + (-4)A_2 \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -2A_1 - 4A_2 = 0 \end{cases}$$

解之得 $A_1=6$, $A_2=-3$ 。故

$$u_C(t) = 6e^{-2t} - 3e^{-4t} (t \geq 0)$$

$$i_L(t) = i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{4} \frac{d(6e^{-2t} - 3e^{-4t})}{dt} = -3e^{-2t} + 3e^{-4t}$$

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

【例5-7】图示电路 $t < 0$ 以前开关 S 合在 a 端，稳定运行已久， $t = 0$ 时开关闭合到 b 端。求电流 $i_L(t)$ 及其最大值 i_{Lmax} 。已知 $U_S = 100 \text{ kV}$ ， $R = 0.2 \Omega$ ， $L = 60 \mu\text{H}$ ， $C = 1500 \mu\text{F}$ ， $i_L(0_-) = 0 \text{ A}$ 。

【解】

以 $i_L(t)$ 为求解对象，对开闭以后的电路列写微分方程：

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

其中， $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ， $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 100 \text{ kV} = 10^5 \text{ V}$ 。带入元件参数整理得

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \times 10^4 \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{9} \times 10^8 i_L(t) = 0$$

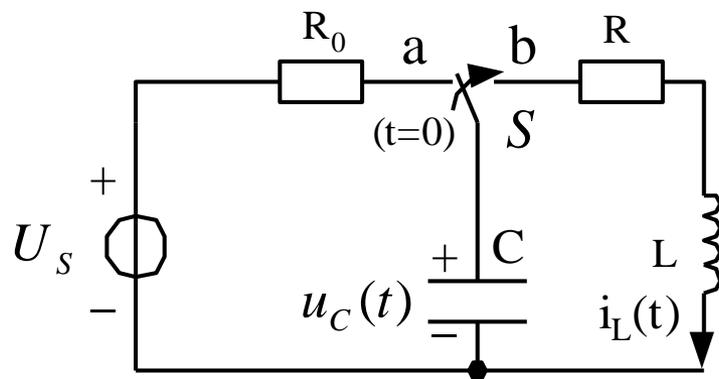


图5.67 例5-7电路图

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

微分方程的特征方程为

$$s^2 + \frac{1}{3} \times 10^4 s + \frac{1}{9} \times 10^8 i_L(t) = 0$$

解得

$$s_{1,2} = \left(-\frac{1}{6} \pm j \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \times 10^4$$
$$i_L(t) = i_L e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 t + \varphi \right)$$

其中， i_L 、 φ 为sin积分常数，由于 $i_L(0_+) = i_L \sin \varphi = 0$ ，故 $\varphi = 2$ 或 2π ，取 $\varphi = 0$ 。

$$\text{由} \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{0_+} = \frac{u_C(0_+)}{L} = \frac{10^5}{60 \times 10^{-6}} = \frac{1}{6} \times 10^{10}, \text{ 带入}$$

上式可得

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$i_L e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t} \left(-\frac{1}{6} \times 10^4 \right) \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 t \right) + i_L e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t} \left(-\frac{1}{6} \times 10^4 \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 t \right) \Big|_{t=0}$$
$$= \frac{1}{6} \times 10^{10}$$

$$i_L \left[\left(-\frac{1}{6} \times 10^4 \right) \sin 0 + \left(-\frac{1}{6} \times 10^4 \right) \cos 0 \right] = \frac{1}{6} \times 10^{10}$$

$$i_L = \frac{\frac{1}{6} \times 10^{10}}{\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 10^6 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^6$$

$$i_L(t) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^6 e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 t \right) (t \geq 0)$$

欲求 i_{Lmax} ，应先求取得最大值的时刻 t_m 。

5.2.1 RLC串联电路的零输入响应

$$\text{令 } \frac{di_L(t)}{dt} = 0, \text{ 即 } \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^6 e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 t\right)\right)}{dt} = 0,$$

解得 $t_m = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 10^{-4} \text{ s}$ 。则

$$\begin{aligned} i_{Lmax} = i_L(t_m) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times 10^6 e^{-\frac{1}{6} \times 10^4 t \times \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 10^{-4}} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{6} \times 10^4 \times \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \times 10^{-4}\right] \text{ A} \\ &= 0.273 \times 10^6 \text{ A} = 273 \times 10^3 \text{ A} \end{aligned}$$

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

以RLC并联电路对冲击电流源激励的响应为例。

图5.57中， $i_S(t)=\delta(t)$ ， $u_C(0_-)=0$ ， $i_L(0_-)=0$ 。t=0时刻， $u_C(0)=0$ ，所以C相当于短路， $i_L(0)=0$ ，所以L相当于断路。所以t=0时刻 $\delta(t)$ 电流只从C支路通过，故 $u_C(0_+) = 0 + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt = \frac{1}{C}$ 。

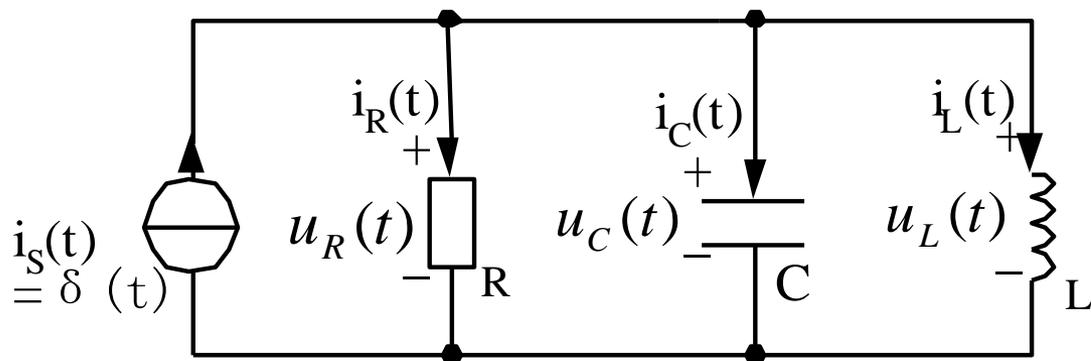


图5.57 零状态RLC并联电路对冲击电流源的响应

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

而在 $t=0$ 时刻 $u_L(0) = 0 \neq \delta(0)$ ，故 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 。

在 $t>0$ 后电路无激励，但 $u_C(0_+) = \frac{1}{C}$ ，如图5.58所示。因此电路为零输入响应电路，其所有响应均由 $u_C(0_+) = \frac{1}{C}$ 引起的。

列写微分方程

$$C \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} + i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_C(t') dt' = 0$$

两边同时求导

$$C \frac{d^2 u_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L} u_C(t) = 0$$

整理上式，并将 $\frac{1}{R} = G$ 带入，可得

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

$$LC \frac{d^2 u_L(t)}{dt^2} + GL \frac{du_C(t)}{R} + u_C(t) = 0$$

其中, $u_C(0_+) = \frac{1}{C}$, $i_L(0_+) = 0$ 。

微分方程的特征方程为

$$LCs^2 + GLs + 1 = 0$$

解得

$$s_{1,2} = \frac{-GL \pm \sqrt{(GL)^2 - 4LC}}{2LC} = \frac{-G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

令 $\frac{G}{2C} = \beta$, $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, 则

$$s_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

由于电路的参数不同， $s_{1,2}$ 也可能有四种不同的情况。

(1) $\frac{G}{2C} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，即 $\beta > \omega_0$ ，为过阻尼情况；

(2) $\frac{G}{2C} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，即 $\beta < \omega_0$ ，为欠阻尼情况；

(3) $\frac{G}{2C} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，即 $\beta = \omega_0$ ，为临界阻尼情况；

(4) $G = 0$ ，即 $\beta = 0$ ，为无阻尼情况；

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

【例5-8】有电路如图5.60所示， $i_L(0_-)=0$ ， $u_C(0_-)=0$ 。求冲击响应 $i_L(t)$ 。

【解】

在 $t=0$ 时刻 $i_L(0)=i_L(0_-)=0$ ，电感 L 相当于开路； $u_C(0)=u_C(0_-)=0$ ，电容 C 相当于短路。

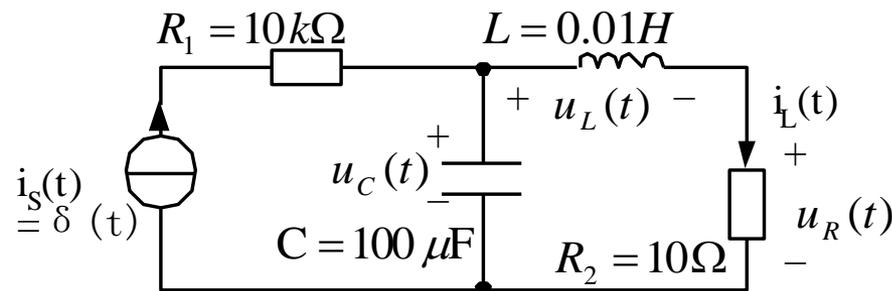


图5.60 例5-8电路图

$\delta(t)$ 电流从电容 C 支路通过， $i_C(0)=\delta(t)$ ， $u_C(0_+)=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_0^-^{0+} i_C(t')dt'=\frac{1}{C}=10^4\text{ V}$ 。

当 $t>0_+$ 时， $\delta(t)=0$ ， R_1 与 $i_s(t)$ 支路断开，电路成为 R_2LC 串联回路，对 $i_L(t)$ 列写微分方程如下。

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = 0$$

带入参数并整理得

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 10^3 \frac{di_L(t)}{dt} + 10^6 i_L(t) = 0$$

微分方程的特征方程为

$$s^2 + 10^3 s + 10^6 = 0$$

特征解为

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \times 10^3 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^3$$

故

$$i_L(t) = i_L e^{-\frac{1}{2} \times 10^3 t} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^3 t + \varphi \right)$$

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

积分常数 i_L 和 φ 仍然根据 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 及

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{0_+} = \frac{u_C(0_+)}{L} \frac{10^4}{10^{-2}} = 10^6 \text{ V} \text{ 求出。其表达式为}$$

$$i_L(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 10^3 e^{-\frac{1}{2} \times 10^3 t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10^3 t \quad (t \geq 0)$$

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

【例5-9】图5.61中，若 $i_S(t)=10\text{ A}$ ， $t\geq 0$ ， $R=100\ \Omega$ ， $C=500\ \mu\text{F}$ ， $L=0.2\ \text{H}$ ， $u_C(0_-)=0$ ， $i_L(0_-)=0$ 求 $i_L(t)$ 的表达式， $t\geq 0$ 。

【解】将KCL，KVL和元件特性方程综合到一起整理得：

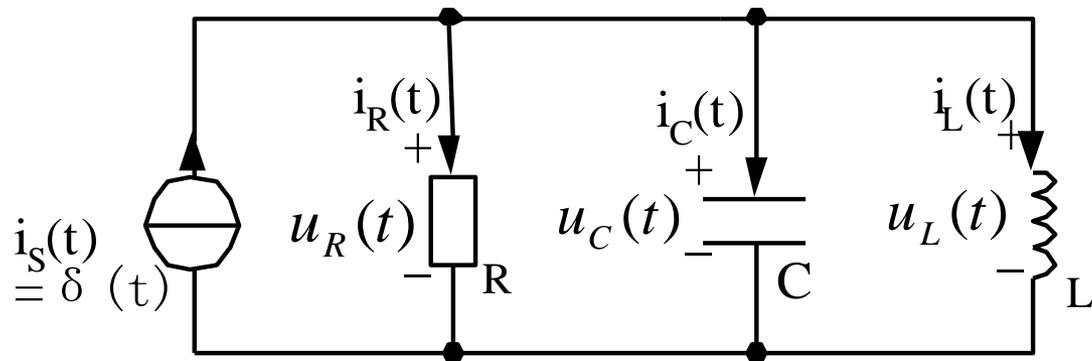


图5.61 RLC并联电路对指数激励的响应

$$LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + RC \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S(t)$$

带入参数得齐次微分方程为

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 20 \frac{di_L(t)}{dt} + 10^4 i_L(t) = 0$$

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

微分方程的特征方程为

$$s^2 + 20s + 10^4 = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = -10 \pm j100$$

激励 $i_s(t) = 10e^{3t}$ ，故 $p=3$ ， $p \neq s_1$ ， $p \neq s_2$ 。所以微分方程的稳态解（强制微分）为

$$I_{Lp}(t) = \frac{I}{LCp^2 + GLp + 1} = \frac{10}{10^{-4} \times 3^2 + 2 \times 10^{-3} \times 3 + 1} = 9.93$$

微分方程的完全解为

$$i_L(t) = i_L e^{-10t} \sin(100t + \varphi) + 9.93e^{3t}$$

由 $i_L(t)|_{0_+} = i_{Lm} \sin \varphi + 9.93$ ，可知 $i_{Lm} \sin \varphi = -9.93$ 。

5.2.2 零状态RLC电路对单位冲击激励的响应

由 $\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{0_+} = \left. \frac{u_L(t)}{dt} \right|_{0_+} = 0$, 代入相关参数, 可得

$$\left[i_{Lm}(-10)e^{-10t} \sin(100t + \varphi) + i_{Lm}(-10)e^{-10t} \cos(100t + \varphi) + 3 \times 9.93e^{3t} \right] \Big|_{0_+} = 0$$

$$(-10)i_{Lm} \sin \varphi + 100i_{Lm} \cos \varphi + 3 \times 9.93 = 0$$

$$i_{Lm} \cos \varphi = \frac{10i_{Lm} \sin \varphi + 3 \times 9.93}{100} = \frac{10 \times (-9.93) - 3 \times 9.93}{100} = \frac{-13 \times 9.93}{100}$$

$$\text{则 } \tan = \frac{i_{Lm} \sin \varphi}{i_{Lm} \cos \varphi} = 7.692, \text{ 可得 } \varphi = 82.593^\circ$$

$$i_{Lm} \sin 82.593^\circ = -9.93$$

$$i_{Lm} = -10.014 \text{ A} \approx -10 \text{ A}$$

最终, 解得

$$i_L(t) = -10e^{-10t} \sin(100t + 82.593^\circ) + 9.93e^{3t} (t \geq 0)$$

5.4 卷积积分

5.4.1 卷积积分公式

至今为止我们分析的电路主要是线性电路，线性电路满足齐次性、可加性和延时性。任意波形的时间函数 $f(t)$ 可以看成一系列冲击强度不同的时间上依次延迟 dt 的冲击函数的叠加。

当 $\delta(t)$ 作用于电路时，其对应的单位冲击响应为 $h(t)$ ；

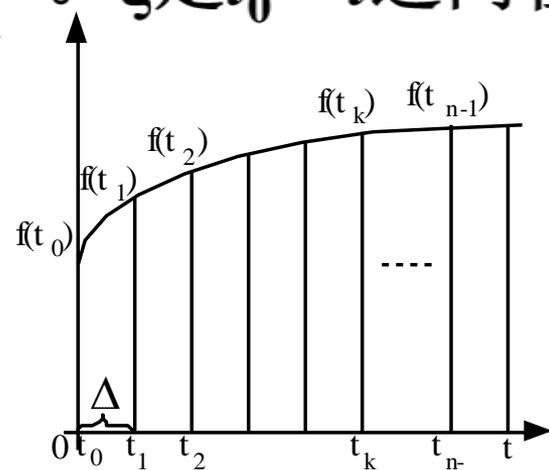
当 $A_i\delta(t)$ 作用于电路时，其对应的单位冲击响应为 $A_i h(t)$ ；

如果 $\delta(t)$ 延迟 t_i 秒作用，其对应的单位延迟冲击响应为 $h(t-t_i)$ ；

自然 $A_i\delta(t-t_i)$ 作用于电路时，其对应的延迟冲击响应为 $A_i h(t-t_i)$ 。

5.4.1 卷曲积分公式

激励函数 $f(t)$ 为一连续时间函数如图5.69所示，可以将 $f(t)$ 看成一系列矩形脉冲的叠加，这些矩形脉冲的宽度相同，用 Δ 表示， $\Delta = \frac{t-t_0}{n}$ 。 ξ 是 $t_0 \rightarrow t$ 之间任一时刻。



$$\begin{aligned}
 & f_{\Delta}(t) \\
 &= f(t_0) \cdot \Delta \cdot P_{\Delta}(t - t_0) \\
 &+ f(t_1) \cdot \Delta \cdot P_{\Delta}(t - t_0) + \dots \\
 &+ f(t_k) \cdot \Delta \cdot P_{\Delta}(t - t_0) + \dots \\
 &+ f(t_n) \cdot \Delta \cdot P_{\Delta}(t - t_0)
 \end{aligned}$$

图5.69 $t > 0$ 时刻的连续时间函数 $f(t)$

如果将等分 n 取得很大，则 $\Delta = \frac{t-t_0}{n}$ 的值将变得很小，如果令 $n \rightarrow \infty$ ，则 $\Delta = \frac{t-t_0}{n} \rightarrow 0$ ， $P_{\Delta}(t - t_k) \rightarrow \delta(t - t_k)$ 。所以 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{\Delta}(t - t_k) = \delta(t - t_k)$

5.4.1 卷曲积分公式

因此, t_k 由分离变量变成了连续变量, $t_k \rightarrow \xi$,
 $\Delta \rightarrow d\xi$ 。

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(t_k) \Delta P_{\Delta}(t - t_k) = \int_{t_0}^t f(\xi) \delta(t - \xi) d\xi$$

可见, 连续时间函数又可以用一系列冲击强度不同依次连续出现的冲击函数的叠加。若激励为 $A_0\delta(t) + A_1\delta(t-t_1) + A_2\delta(t-t_2) + \dots$, 则一个冲击响应为 $h(t)$ 的线性定常电路对该激励的零状态响应自然为 $r_i(t) = A_0h(t) + A_1h(t-t_1) + A_2h(t-t_2) + \dots$ 。

5.4.1 卷积积分公式

所以对应于 $f(t)$ 的零状态响应应为 $r_i(t) = \int_{t_0}^t f(\xi)h(t-\xi)d\xi = f(t) * h(t)$ 。该式中变量 ξ 也可以写成 τ ，该式便是卷积积分公式。在应用时把 $f(t)$ 写成 $f(\xi)$ ， $h(t)$ 写成 $h(t-\xi)$ ，代入式中相乘然后对 ξ 从 t_0 到 t 积分即可。也可以将 $f(t)$ 写成 $f(t-\xi)$ ， $h(t)$ 写成 $h(\xi)$ ，相乘然后积分，其结果相同，因为卷积积分是满足交换律的。