第八章　离散控制系统分析

- **内容提要**

　本章以离散控制系统为研究对象,介绍离散控制系统的一般组成,采样过程，采样定理,Z变换的定义和方法。重点介绍了离散系统的脉冲函数模型，稳定性分析、稳态误差分析。

- **知识要点**

　离散系统的构成，连续信号的离散化，采样定理，变换，脉冲传递函数的求取，离散系统的稳定判据，采样系统的稳态误差。

- **教学重点**

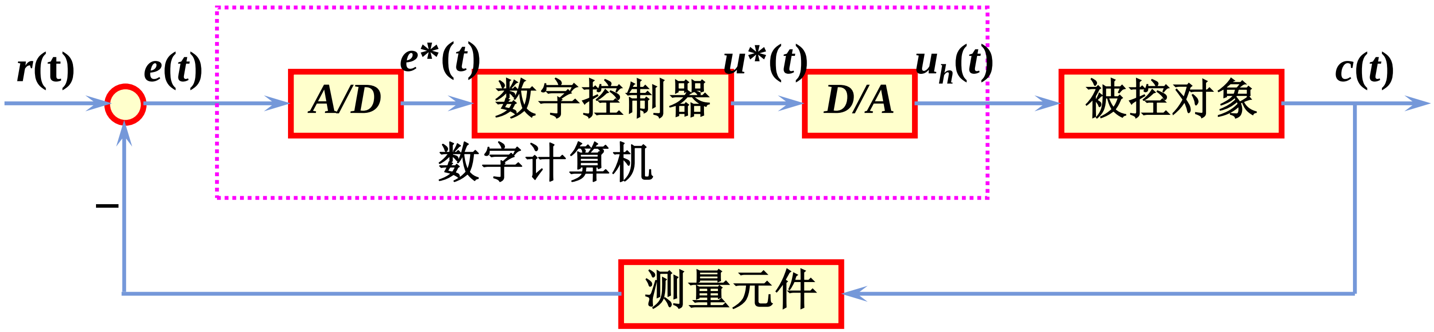
　熟练掌握Z变换和反变换的方法，熟练应用Z变换的定　理。重点掌握求取脉冲传递函数的方法，熟练判别闭环系统的稳定性，计算系统的稳态误差。

8.1 离散系统的基本概念

❖ 有关概念

1. 离散信号：仅定义在离散时间上的信号称离散信号，离散信号以脉冲或数码的形式呈现。

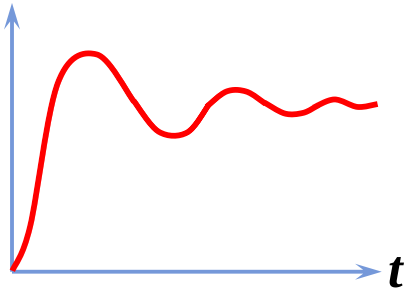
2. 离散系统：系统中有一处或多处为离散信号的系统称离散系统。典型的计算机控制系统即为离散系统的一种。其原理图如下：



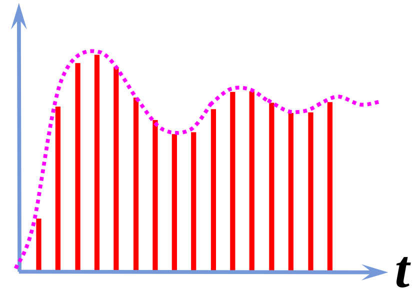
计算机控制系统典型原理图

A/D：模数转换器，将连续的模拟信号转换为离散的数字信号。包括采样与量化两过程。

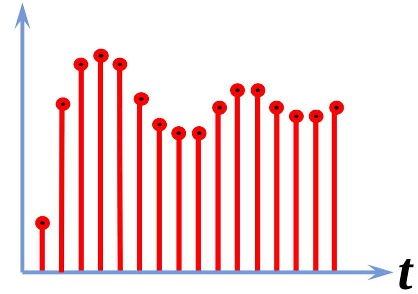
D/A：数模转换器，将离散的数字信号转换为连续的模拟信号。包括解码与复现两过程。



(a) 连续信号



(b) 离散信号



(c) 离散量化信号

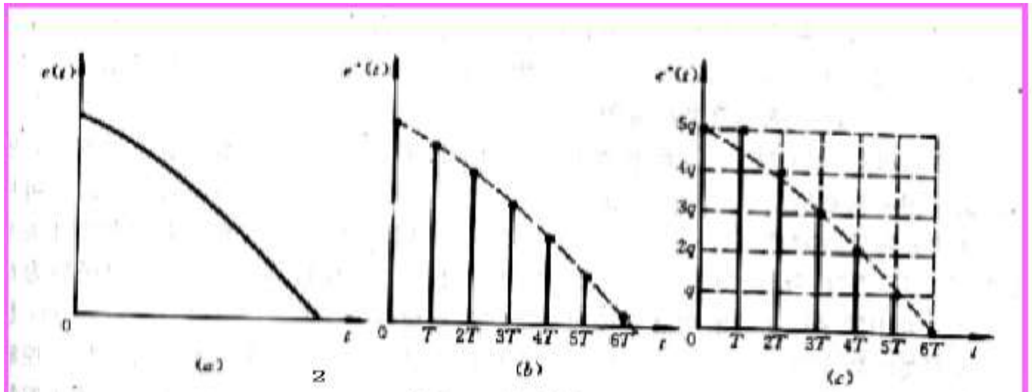


图 7-1 A/D 转换过程

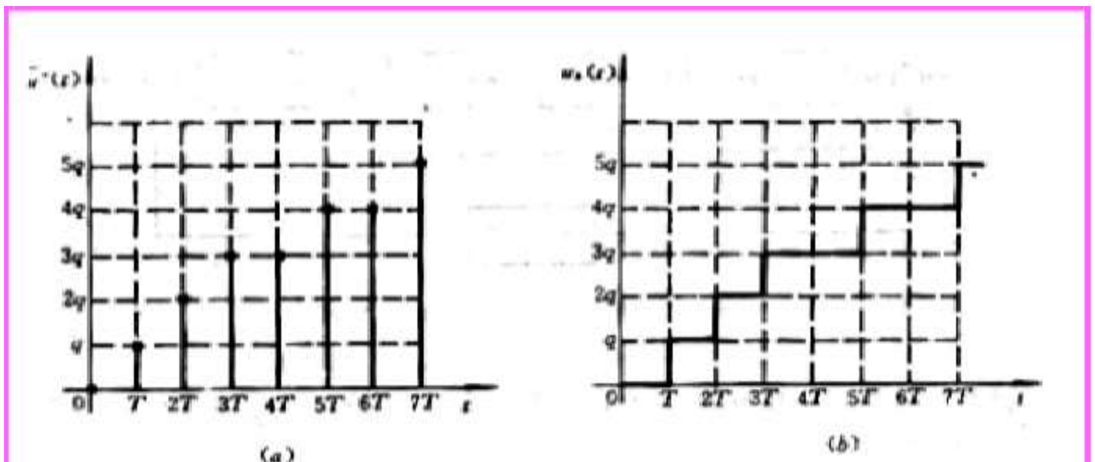


图 7-2 D/A 转换过程

❖离散控制系统的特点

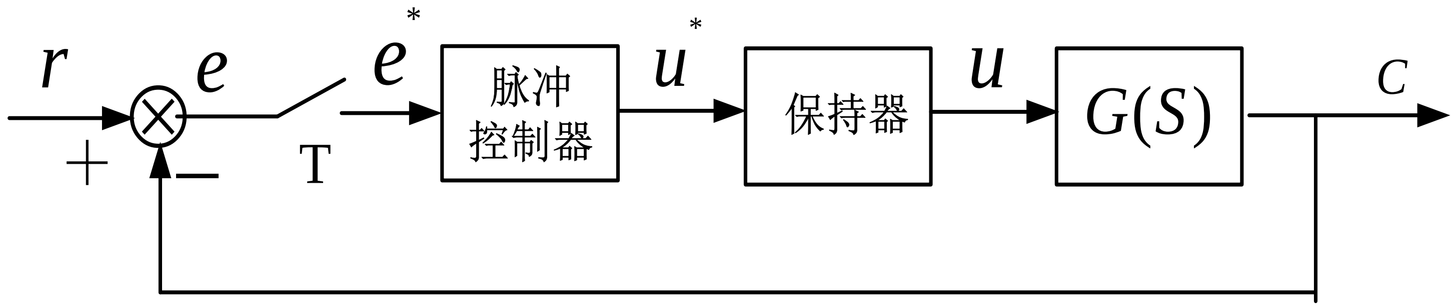
1. 校正装置效果比连续式校正装置好，且由软件实现的控制 规律易于改变，控制灵活。

2. 采样信号，特别是数字信号的传递能有效地抑制噪声，从而提高系统抗干扰能力。

3. 可用一台计算机分时控制若干个系统，提高设备利用率。

4. 可实现复杂控制规律，且可以在运行中实时改变响应参数。

一个典型的采样控制系统如图：



e是连续的误差信号，经采样开关后，变成一组脉冲序列 e^*，

脉冲控制器对 e^* 进行某种运算，产生控制信号脉冲序列 u^*，保持器将采样信号 u^* 变成模拟信号 u，作用于被控对象 $G(S)$

模拟信号——在时间上连续，且在幅值上连续（导数连续）的信号。

采样信号——又称离散信号，按一定的时间间隔对模拟信号进行采样得到的在时间上离散的一系列脉冲。

采样控制系统和连续控制系统的区别：在连续系统中，各处的信号都是模拟信号；在采样系统中，一处或数处的信号是采样信号。

采样系统的个性——采样过程和采样信号保持

采样系统和连续系统的共性——（1）闭环控制；（2）需分析稳定性、暂态性能和稳态性能；（3）需进行校正。

8.2 信号的采样和恢复

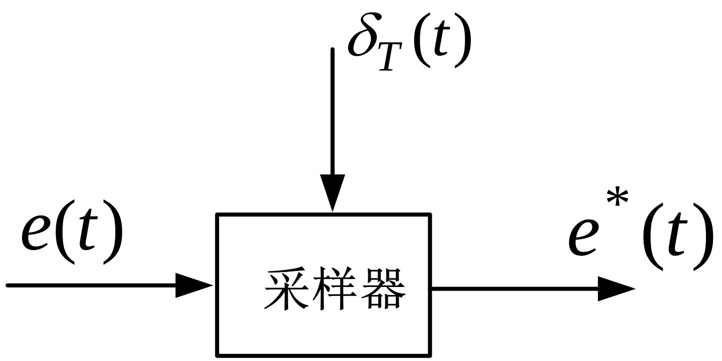
- 8.2.1 采样过程与采样定理

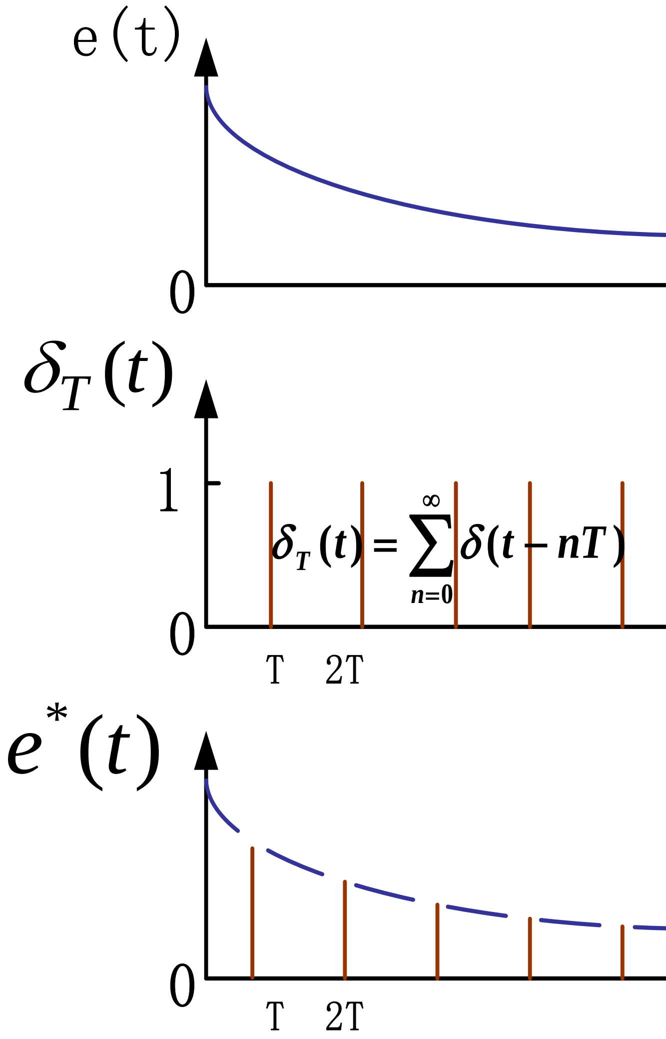
采样定义

按一定的时间间隔对连续信号采样，将连续信号转换为脉冲序列的过程，称为采样过程。采样开关是用来实现采样过程的装置。

采样开关按周期T闭合，T称为采样周期。每次闭合时间为 ε，由于在实际中总有 $\varepsilon << T$，且 ε 远小于 $G(s)$ 中的时间常数，可近似认为 $\varepsilon \to 0$。

采样过程可用图表示





采样信号 $e^*(t)$ 是 $\delta_T(t)$ 和 $e(t)$ 的乘积，

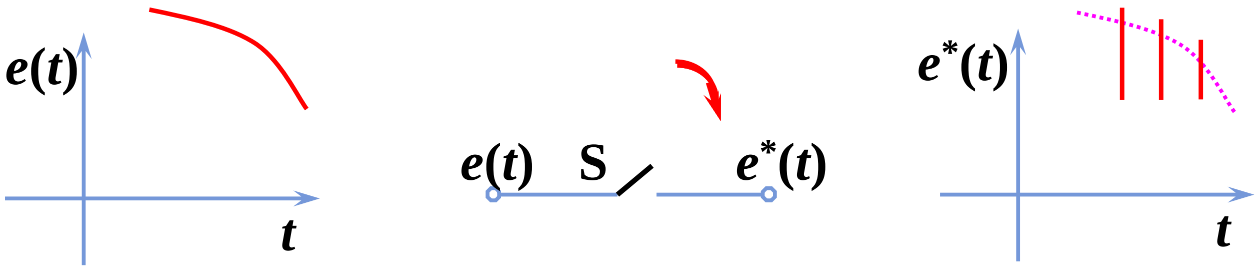
其中载波信号 $\delta_T(t)$ 决定采样时刻，

它是周期为T的单位脉冲序列，

采样信号在nT(n=0,1,2...)时刻的值由 $e(t)$ 决定。

➢采样过程

☞ 数学描述：把连续信号变换为脉冲序列的装置称为采样器，又叫采样开关。采样过程可用下图表示。



$$e^*(t)=e(t)\ \delta_T(t),$$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$ 为理想单位脉冲序列

➢采样过程的数学表达式

单位脉冲序列

$$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

采样信号为

$$e^*(t)=e(t)\,\delta_T(t)=e(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

采样信号的拉氏变换

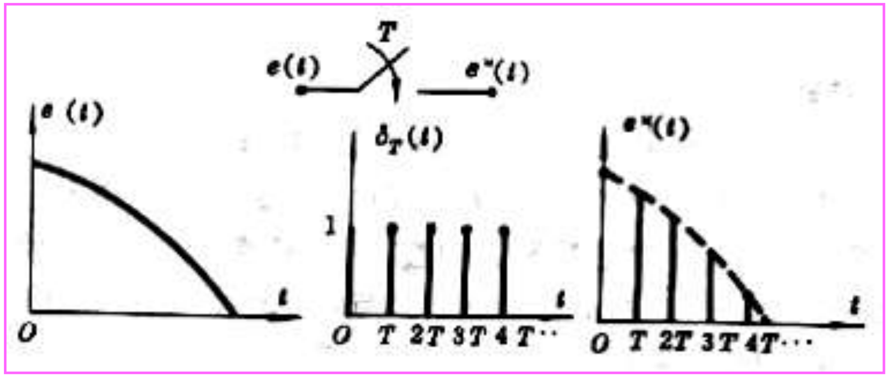
$$E^*(s)=L[e^*(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTS}$$

例 $e(t)=e^{at}$,试写出$e^*(t)$表达式。

$$\text{解}: e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{anT}\cdot\delta(t-nT)$$

物理意义：可看成是单位理想脉冲串$\delta_T(t)$被输入信号$e(t)$进行调制的过程，如下图所示

在图中，$\delta_T(t)$为载波信号；$e(t)$为调制信号；$e^*(t)$为理想输出脉冲序列



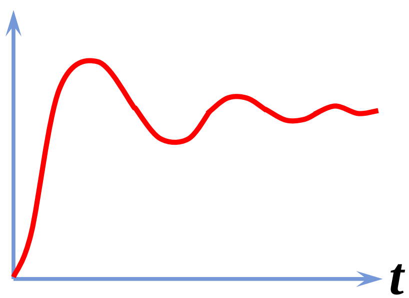
➢采样定理

设计控制系统必须严格遵守的一条准则。

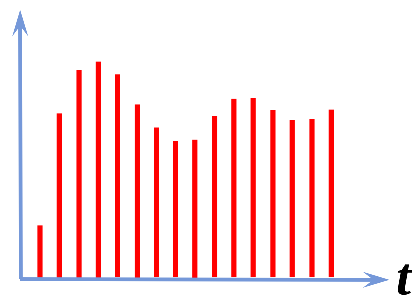
1. 问题的提出

连续信号$e(t)$经过采样后，只能给出采样点上的数值，不能知道各采样 时刻之间的数值。从时域上看，采样过程损失了$e(t)$所含的信息。

怎样才能使采样信号$e^*(t)$大体上反映$e(t)$的变化规律呢？



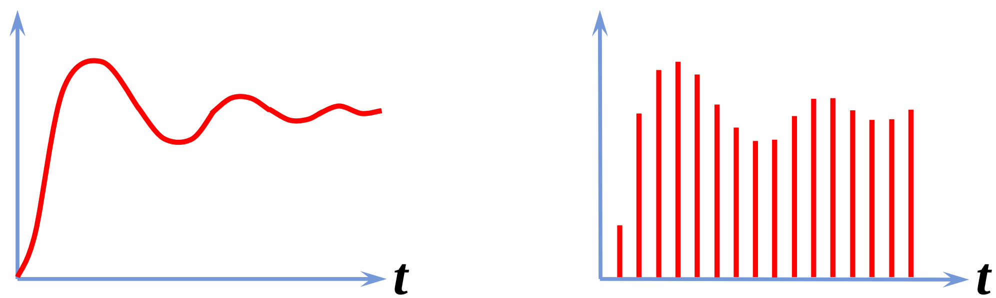
(a)连续信号



(b)离散信号

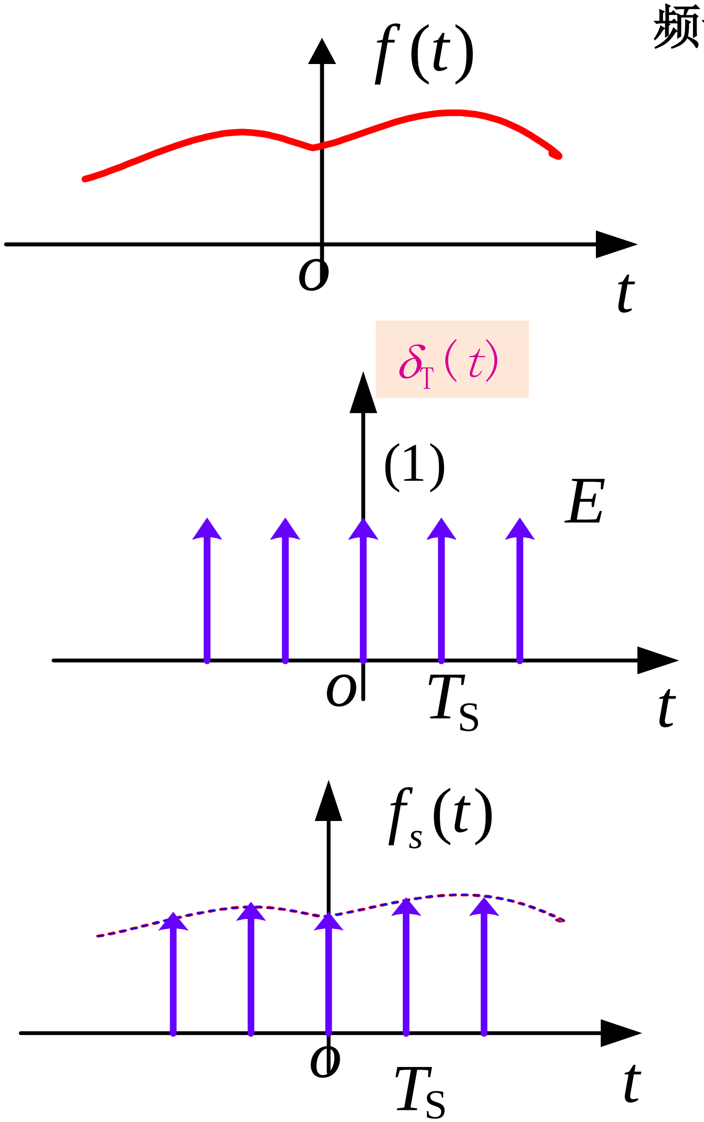
2. 定性分析

如果连续信号$e(t)$变化缓慢（最大角频率ω_{max}较低），而采样角频率ω_s比较高（即采样周期T=2π/ω_s较小），则$e^*(t)$基本上能反映$e(t)$的变化规律



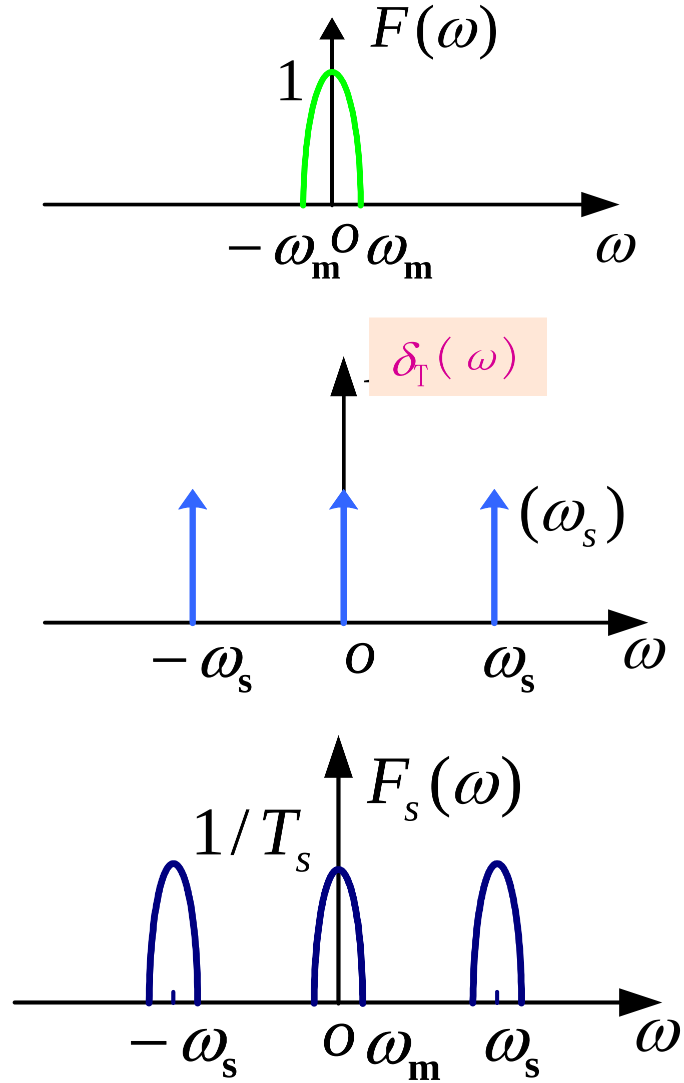
(a)连续信号　(b)离散信号

信号抽样



f(t)
o
t
δT(t)
(1)
E
o
TS
t
fs(t)
o
TS
t

频谱图：



F(ω)
1
−ωm
o
ωm
ω
δT(ω)
(ωs)
−ωs
o
ωs
ω
Fs(ω)
1/Ts
−ωs
o
ωm
ωs
ω

3. 采样定理（香农定理）

如果采样器的输入信号最高角频率为ω_{max}，则只有当采样频率$\omega_s \geq 2\omega_{max}$,才可能从采样信号中无失真地恢复出连续信号。

$$\omega_s \geq 2\,\omega_{max}$$

其中

ω_s：采样角频率，$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$

ω_{max}：连续信号$e(t)$频谱的上限频率。

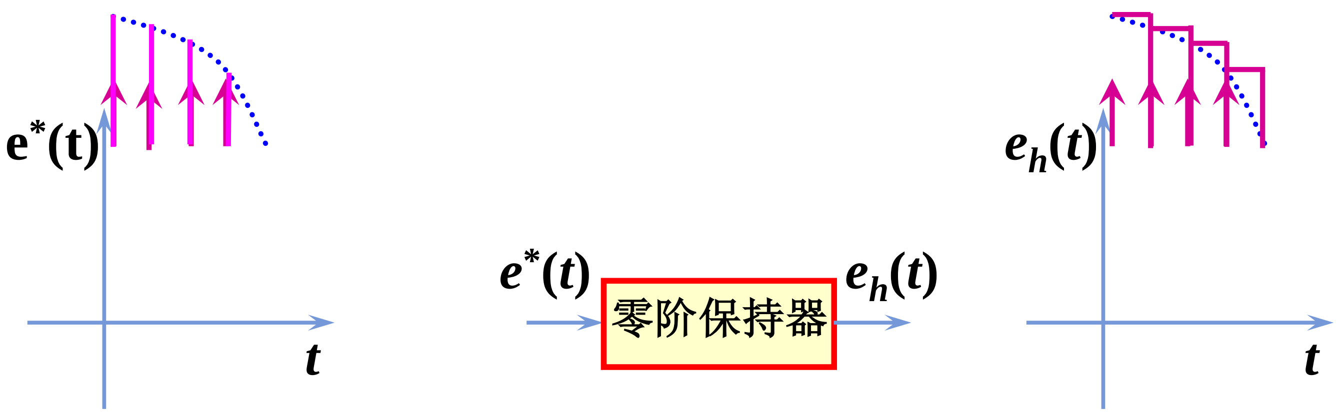
采样定理给出了选择采样周期T的依据。

▪ 信号复现

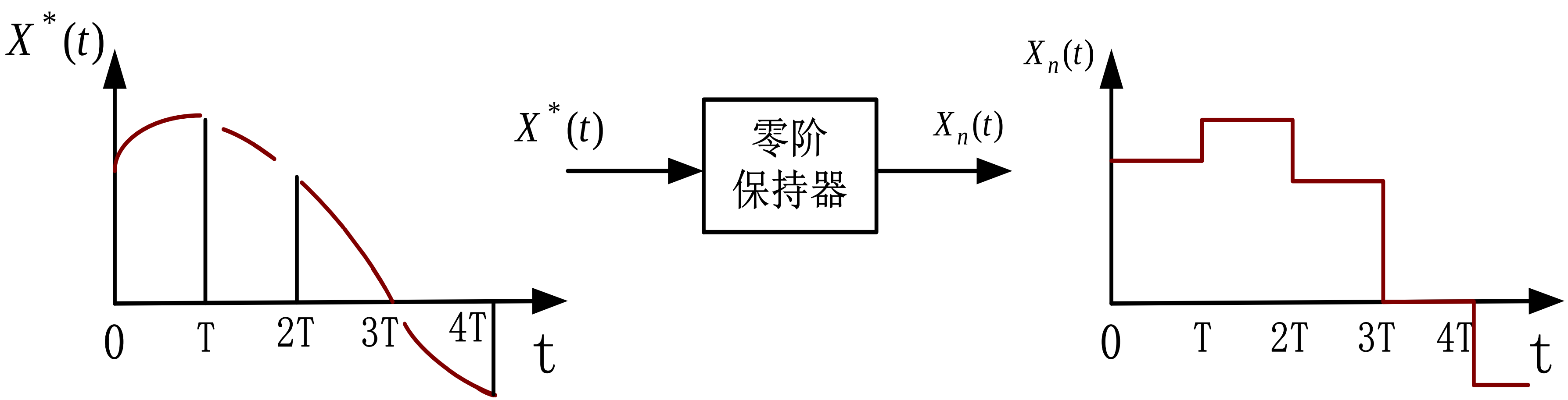
将数字信号转换复原成连续信号的过程称信号复现。该装置称为保持器或复现滤波器。

▪ 零阶保持器

零阶保持器是最简单也是工程中使用最广泛的保持器。零阶保持器的输入输出特性可用下图描述。



8.3　信号保持器

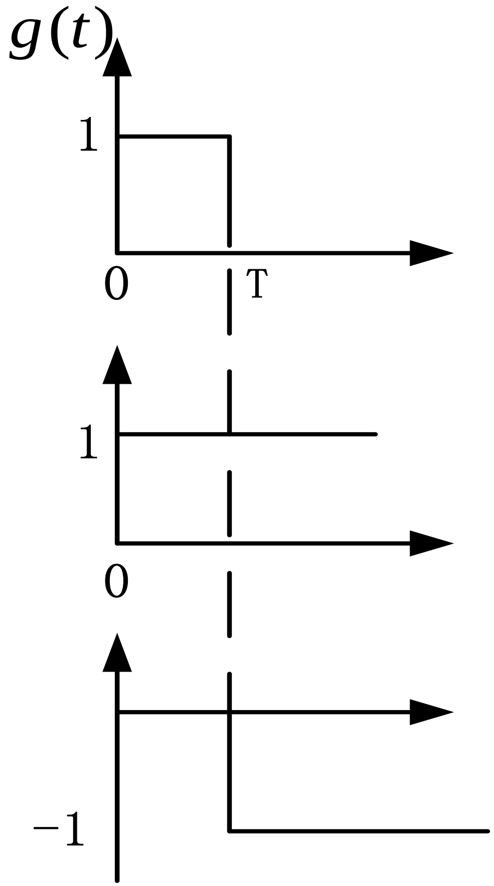


零阶保持器是一种按恒值规律外推的保持器，它将前一采样时刻的值，保持到下一个采样时刻，即

$$X_n(t) = X(nT), \quad nT \le t < (n+1)T, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

零阶保持器的传递函数

根据零阶保持器的单位脉冲响应，推出其传递函数。



零阶保持器的单位脉冲响应是一个矩形，宽度为T，高为1，它可表示成以下二个单位阶跃信号的迭加。

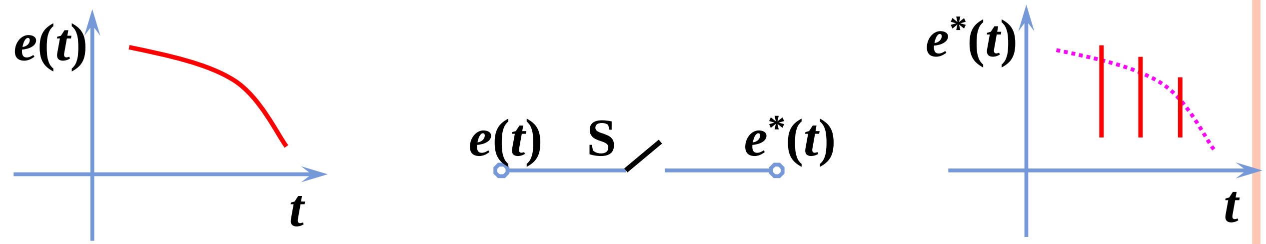
$$g(t)=1(t)-1(t-T)$$

单位脉冲响应的拉氏变换就是零阶保持器的传递函数。

$$G_h(s)=L[g(t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-TS}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

8.4 Z变换

Z变换



$e^*(t)=e(t)\,\delta_T(t)$, 其中 $\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$ 为理想单位脉冲序列。则：

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)\delta(t-nT)$$

1. Z变换的定义

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}$$

令$z=e^{Ts}$，则 $\boxed{\mathrm{E(z)}=\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}\mathrm{e(nT)z^{-n}}}$ $=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\ldots$

即为Z变换的定义式。

称$E(z)$为$e^*(t)$的Z变换, 记作 $Z[e^*(t)]=E(z)$, 或 $Z[e(t)]=E(z)$

2. Z变换方法

（1）级数求和法

将Z变换的定义式展开：

$$E(z)=e(0)+e(T)z^{-1}+e(2T)z^{-2}+\ldots+e(nT)z^{-n}+\ldots$$

对于常用函数Z变换的级数形式，都可以写出其闭合形式。

（2）部分分式法

① 已知连续时间函数e(t)的拉氏变换E (s)；

② 将E (s)展开成部分分式之和的形式；

③ 求拉氏反变换，再求Z变换E(z)。

（3）查表

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}$$

级数求和法　典型信号的Z变换

（1）单位脉冲函数 $e(t)=\delta(t)$　$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=1z^{0}=1$

（2）单位阶跃函数 $e(t)=1(t)$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}1(nT)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}(|z|>1)$$

（3）单位理想脉冲序列 $e(t)=\delta_T(t)$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_T(nT)z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}(|z|>1)$$

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n}$$

(4) 单位斜坡信号 e(t)=t，则 $E(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} nT\cdot z^{-n}$

对比(2)中结果，有 $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}=\dfrac{z}{z-1}$

两端对z求导数，得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-n)z^{-n-1}=\dfrac{-1}{(z-1)^2}$

两边同乘(-Tz)，得单位斜坡信号的z变换

$$\sum_{n=0}^{\infty} nT\cdot z^{-n}=\frac{Tz}{(z-1)^2},(|z|>1)$$

(5) 指数函数 e(t)=e-at(a为实常数〕，则

$$E(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}\cdot z^{-n}$$

$$=1+e^{-aT}\cdot z^{-1}+e^{-2aT}\cdot z^{-2}+e^{-3aT}\cdot z^{-3}+\cdots \qquad (*)$$

这是一个公比为(e-aT·z-1)的等比级数，当| e-aT ·z-1 |<1时，级数收敛,则可写成闭合形式

$$E(Z)=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}} \qquad (**)$$

❖教材例题7-7

（6）正弦信号 e(t)=sin ωt，因为 $\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})$

所以

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2j}(e^{j\omega nT}-e^{-j\omega nT})\cdot z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2j}[\sum_{n=0}^{\infty}(e^{j\omega nT}\cdot z^{-n})-\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-j\omega nT}\cdot z^{-n})]$$

利用(*)、(**)式，有

$$E(z)=\frac{1}{2j}[\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}]=\frac{1}{2j}[\frac{z(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})}{z^2-z(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})+1}]$$

$$=\frac{z\cdot\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

- 部分分式法(适用于拉氏变换简单的函数)

例　求解　$F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$　的Z变换 。

解：因为　$F\left(s\right)=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+a}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+a}$

而　$L^{-1}F\left(s\right)=1(t)-e^{-at}$

所以　$F(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-e^{-aT}}=\dfrac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

由拉氏变化求出简单的时域函数，其相应的Z变换是已知的

(7) 设$E(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$，$e^*(t)$的z变换：

进行部分分式展开，有

$$E(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

再取拉氏反变换

$$e(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}]=1(t)-e^{-t}$$

参照(2)和(5),得

$$E(z)=z[1(t)-e^{-t}]=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$=\frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

3. Z变换的性质

（1） 线性定理

若 $E_1(z)=Z[e_1(t)]$，$E_2(z)=Z[e_2(t)]$，a为常数，则

$$Z[e_1(t)+e_2(t)]=E_1(z)+E_2(z)，\quad Z[ae(t)]=a\,E(z)$$

（2） 实数位移定理

若 $E(z)=Z[e(t)]$，

则 $Z[e(t-kT)]=z^{-k}E(z)$, $Z[e(t+kT)]=z^{k}\left[E(z)-\sum_{n=0}^{k-1}e(nT)z^{-n}\right]$

例　已知 $e(t)=1(t-T)$，求Z变换 $E(z)$。

解：

$$z[1(t-T)]=z^{-1}\cdot z[1(t)]=z^{-1}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{1}{z-1}$$

(3) 复数位移定理

已知e(t)的z变换为E(z)，则有

$$Z[e(t)\cdot e^{\mp at}]=E(z\cdot e^{\pm at})$$

例7-9 已知$e(t)=t\cdot e^{-at}$, 求Z变换$E(z)$。

解：已知单位斜坡信号的z变换为$Z[t]=\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$

根据复数位移定理，有 $Z[t\cdot e^{-at}]=\dfrac{T(z\cdot e^{aT})}{(z\cdot e^{aT}-1)^2}$

(4) 终值定理

若e (t)的z变换为E(z)，函数序列e(nT)为有限值(n=0,1,2,…)，且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} e(nT)$ 存在，则

$$\lim_{n\to\infty}[e(nT)] = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$$

（5）卷积定理

设x(nT)和y(nT)为两个采样函数，其离散卷积定义为

x(nT)·y(nT)= $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x(kT)y[(n-k)T]$ 则卷积定理为：

Z[x(nT)·y(nT)]=X(z)Y(z)

4. Z反变换

☞ 从Z域函数$E(z)$求时域函数$e^*(t)$，叫做Z反变换。

记作$Z^{-1}[E(z)]= e^*(t)$。

1. 部分分式展开法（查表法：p256表7-2）

部分分式展开法是将$E(z)$展成若干分式和的形式，对每部分分式查Z变换表找出相应的$e^*(t)$。因Z变换表中Z变换函数分子普遍有因子Z，<u>所以应将$E(z)/z$展开成部分分式。</u>

例 已知z变换函数 $E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$ ，试求其z反变换。

解：首先将$E(z)/z$展开成部分分式

$$E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$\frac{E(z)}{z}=\frac{10}{(z-1)(z-2)}=\frac{-10}{z-1}+\frac{10}{z-2}$$

所以 $E(z)=-10\dfrac{z}{z-1}+10\dfrac{z}{z-2}$

查表可得 $z^{-1}[\dfrac{z}{z-1}]=1$， $z^{-1}[\dfrac{z}{z-2}]=2^{n}$

所以 $e(nT)=(-1+2^{n})\times 10$

$$e^{*}(t)=e(0)\delta(t)+e(T)\delta(t-T)+e(2T)\delta(t-2T)+\ldots$$

$$=0+10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)+\ldots$$

例7-11 已知z变换函数

试求其z反变换 $E(z)=\dfrac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$

❖教材例题

解：

因为
$$\frac{E(z)}{z}=\frac{1-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}}$$

所以
$$E(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

查表得 $e(t)=1(t)-e^{-at}$ 则 $e(nT)=1-e^{-anT}$

所以 $e^*(t)=e(0)\,\delta(t)+e(T)\,\delta(t-T)+e(2T)\,\delta(t-2T)+\ldots$

$=0+(1-e^{-aT})\,\delta(t-T)+(1-e^{-2aT})\,\delta(t-2T)+(1-e^{-3aT})\,\delta(t-3T)+\ldots$

2. 幂级数法（综合除法\长除法）

由Z变换的定义

$$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)z^{-n}=\mathrm{e}(0)+\mathrm{e}(\mathrm{T})\mathrm{z}^{-1}+\mathrm{e}(2\mathrm{T})\mathrm{z}^{-2}+\cdots$$

而

$$E(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}(m\le n)==\mathrm{c}_0+\mathrm{c}_1\mathrm{z}^{-1}+\mathrm{c}_2\mathrm{z}^{-2}+\cdots$$

则$c_0,c_1,c_2,\ldots$就是脉冲序列$e^*(t)$各采样点的值$e(nT)$，所以

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\delta(t-nT)$$

例　　求 $F(z)=\dfrac{z}{z+3}$ 的反变换 $f(n)$（收敛域为 $|z|>3$）。

解　由收敛域可知，对应的序列 $f(n)$ 一定为右边序列，即 $F(z)$ 的幂级数是按 z 的降幂排列展开，也就是说长除法应从 z 的最高次幂开始除，按 z^{-1} 的幂次展开级数，它的系数即构成序列 $f(n)$。因为：

$$
\begin{array}{r l}
 & 1-3z^{-1}+9z^{-2}-27z^{-3}+\cdots \\
z+3 \big) & z \\
 & \underline{z+3} \\
 & -3 \\
 & \underline{-3-9z^{-1}} \\
 & 9z^{-1} \\
 & \underline{9z^{-1}+27z^{-2}} \\
 & -27z^{-2} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

则：$F(z) = 1 - 3z^{-1} + 9z^{-2} - 27z^{-3} + \cdots$

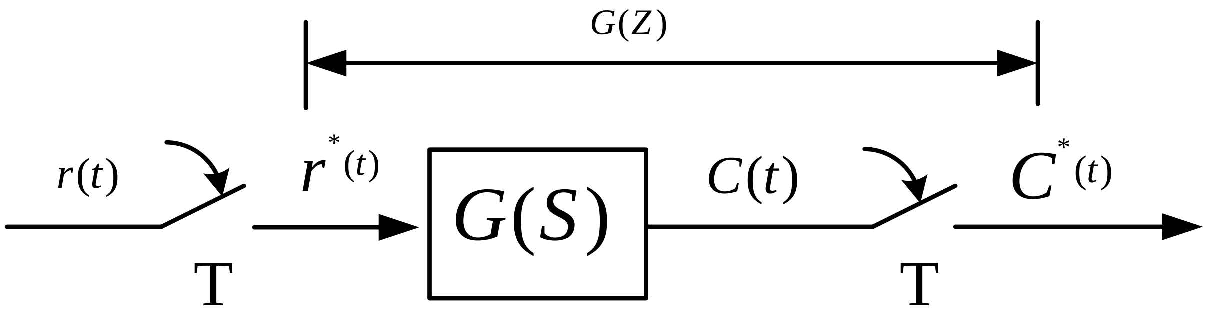
所以：$f(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, -3, 9, -27, \cdots\}$

或者写成：$f(n) = (-3)^n u(n) \quad n > 0$

返回本节

8.5 脉冲传递函数

❖一、基本概念



❖定义：线性离散系统中，在零初始条件下，系统输出采样信号的z变换与输入采样信号z变换之比，称为系统的脉冲传递函数。

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

采样脉冲函数的物理意义

采样系统的脉冲传递函数是系统单位脉冲响应 $g(t)$ 经采样后的采样信号 $g^*(t)$ 的Z变换。

$$g^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}g(nT)\delta(t-nT)$$

$$G(z)=Z[g^*(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}g(nT)z^{-n}$$

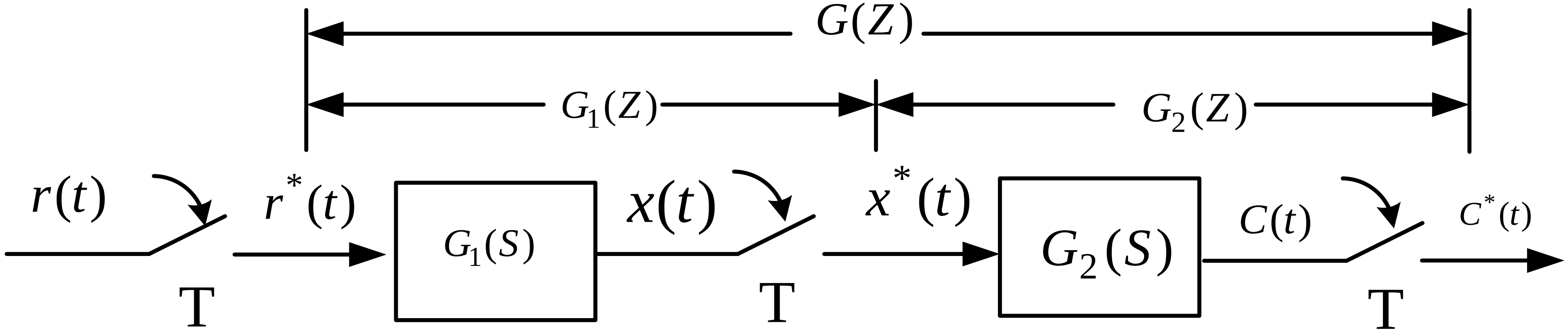
采样脉冲函数G(Z) 传递函数G(S)

单位脉冲响应 g(t)

▪开环脉冲传递函数

1. 串联环节

a) $X(z)=G_1(z)R(z),\ C(z)=G_2(z)X(z)$ 　　 $C(z)=G_1(z)G_2(z)R(z),\ G(z)=\dfrac{C(z)}{R(z)}$



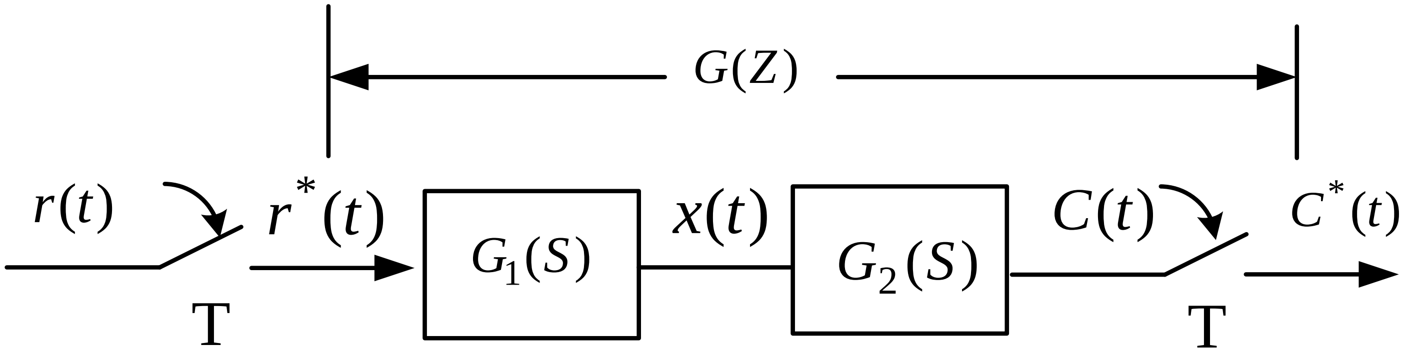
❖将采样开关分隔的二个线性环节串联，脉冲传递函数是两个串联环节脉冲传递函数之积。结论可推广到n个环节串联，各相邻环节之间都有采样开关隔开的情况。

▪开环脉冲传递函数

1. 串联环节

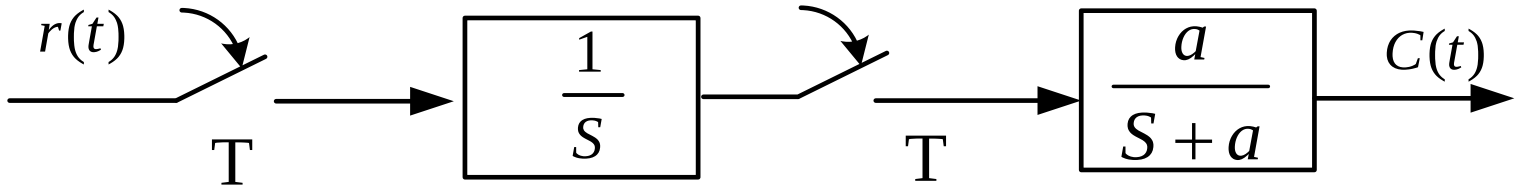
$b)\ G(s)=G_1(s)G_2(s)$ $\qquad G(z)=Z[G_1(s)G_2(s)]$ 记为 $G_1G_2(z)$

- 在 $a)$ 和 $b)$ 中：$G_1G_2(z)\neq G_1(z)G_2(z)$



❖无采样开关隔开的两个线性环节串联，脉冲传递函数是两个环节经采样后的单位脉冲响应 和 $g_1^*(t)$ 的乘积的Z变换。结论可推广到n个环节直接串联的情况。

❖例:

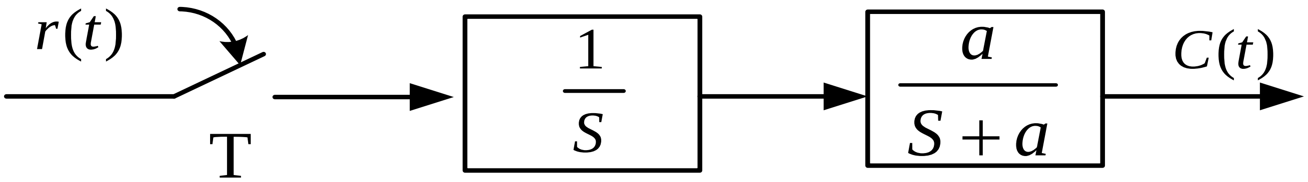


❖由

$$G_1(s)=\frac{1}{s}，\ 得G_1(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$G_2(s)=\frac{a}{s+a}，\ 得G_2(z)=\frac{az}{z-e^{-aT}}$$

$$G(z)=G_1(z)G_2(z)=\frac{az^2}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$



$$G_1(s)G_2(s)=\frac{a}{s(s+a)}$$

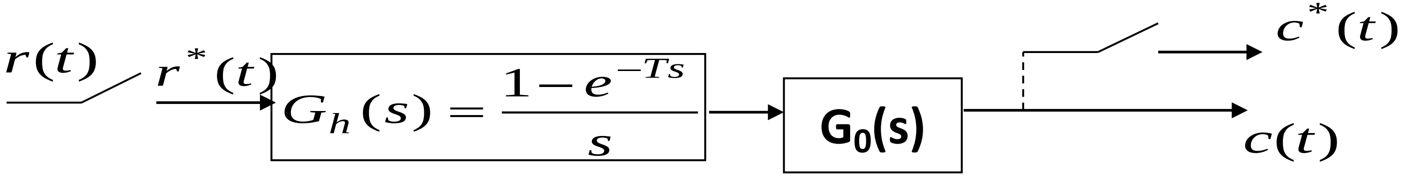
$$L^{-1}[G_1(s)G_2(s)]=1-e^{-aT}$$

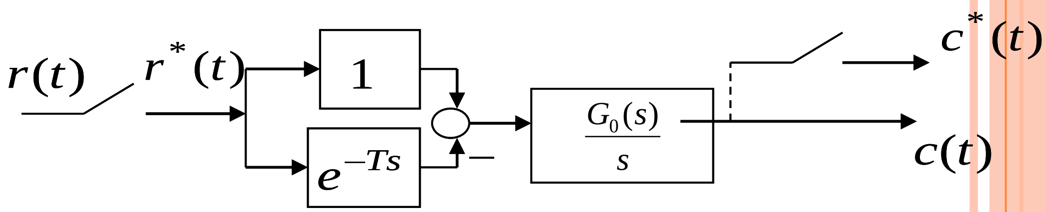
$$G(z)=G_1G_2(z)=Z[1-e^{-aT}]=\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

2. 有零阶保持器的情况

$$C_1(z) = Z[\frac{G_p(s)}{s}]R(z) \qquad C_2(z) = z^{-1}C_1(z)$$

$$C(z) = C_1(z) - C_2(z) = (1 - z^{-1})Z[\frac{G_p(s)}{s}]R(z) \qquad G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = (1 - z^{-1})Z[\frac{G_p(s)}{s}]$$



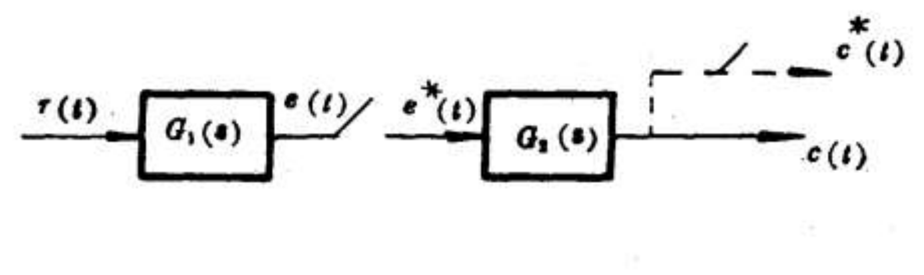


3. 连续信号进入连续环节

$$E(s) = G_1(s)R(s) \qquad E(z) = G_1R(z)$$

$$C(z) = G_2(z)E(z)$$

$$C(z) = G_2(z)G_1R(z)$$

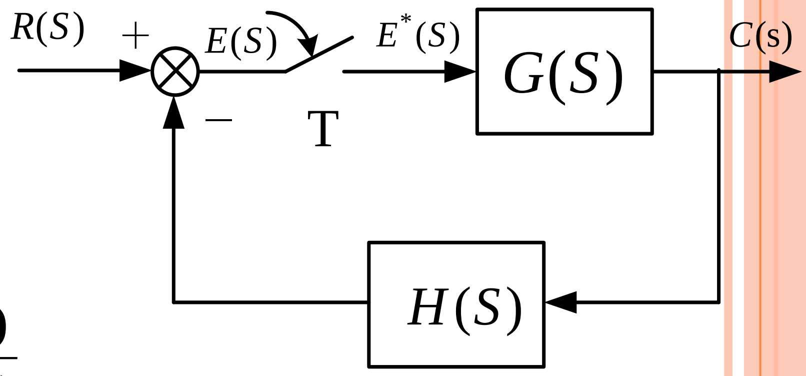


闭环脉冲传递函数

1) $E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-G(s)H(s)E^*(s)$

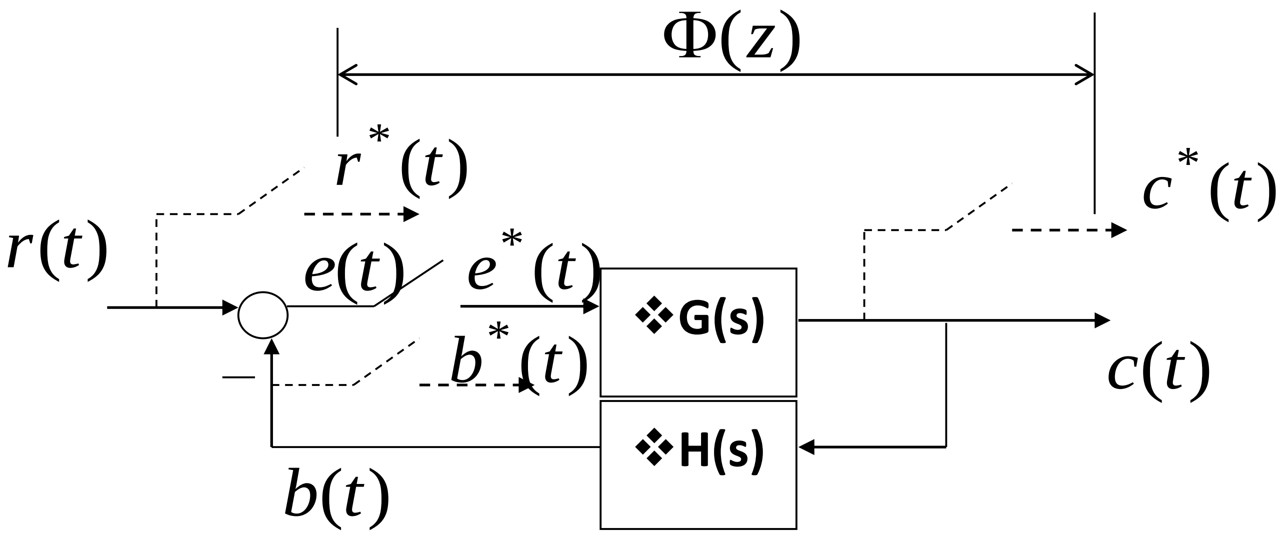
$E^*(s)=R^*(s)-[G(s)H(s)]^*E^*(s)$

$E(z)=R(z)-GH(z)E(z)$



$$E(z)=\frac{R(z)}{1+GH(z)}\qquad C(z)=G(z)E(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+GH(z)}$$

$$\phi_e(z)=\frac{1}{1+GH(z)},\quad \phi(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$



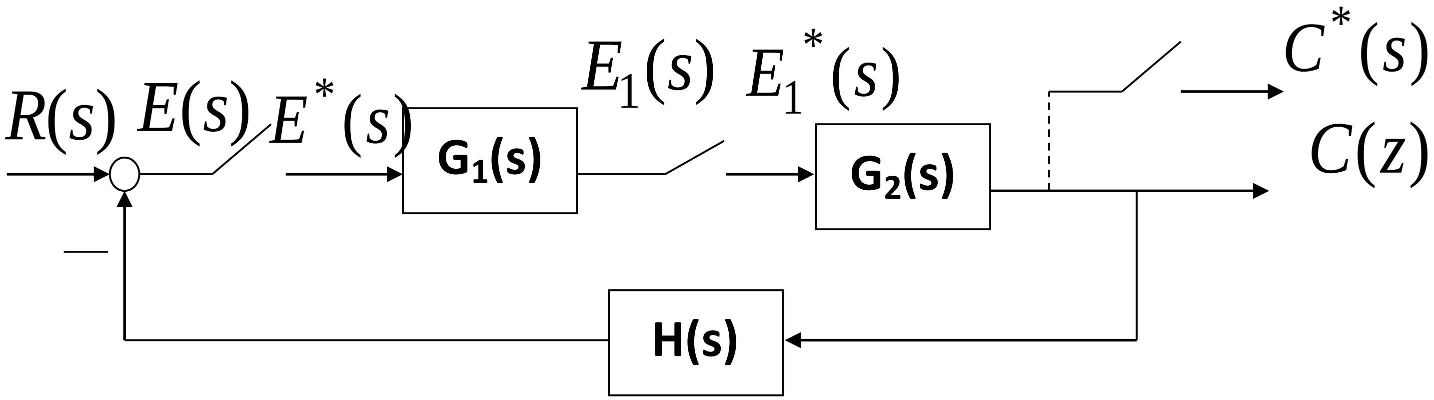
(7-23)

▪闭环脉冲传递函数

$$2)\quad E(z)=R(z)-G_1(z)HG_2(z)E(z)$$

$$C(z)=G_1(z)G_2(z)E(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$$

$$\phi_e(z)=\frac{1}{1+G_1(z)G_2H(z)},\phi(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$$



(7-24)

例

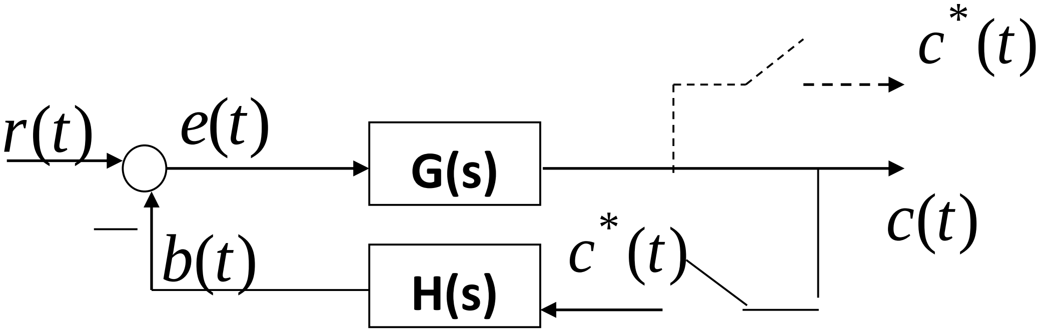
$$C(s)=E(s)G(s)$$

$$E(s)=R(s)-H(s)C^{*}(s)$$

$$C(s)=G(s)R(s)-G(s)H(s)C^{*}(s)$$

$$\boldsymbol{C(z)=GR(z)-GH(z)C(z)}$$

$$\boldsymbol{C(z)=\frac{GR(z)}{1+GH(z)}}$$



(7-25)

8.6 离散控制系统稳定性分析

8.6.1 离散控制系统稳定的充要条件

$$E^*(s)=L[e^*(t)]=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nTs}$$

$$z=e^{Ts}$$

一、S域到Z域的映射

1. **S域的虚轴映射成Z域的圆周；左半S平面映射在圆周内，右半S平面映射在圆周外。**

二、离散系统稳定的充要条件

1. **时域中：特征方程的根满足$|a_i|<1$　　(了解即可)**
2. **Z域中：特征方程$1+HG(Z)=0$的模$|Z_i|<1$ (牢固掌握)**

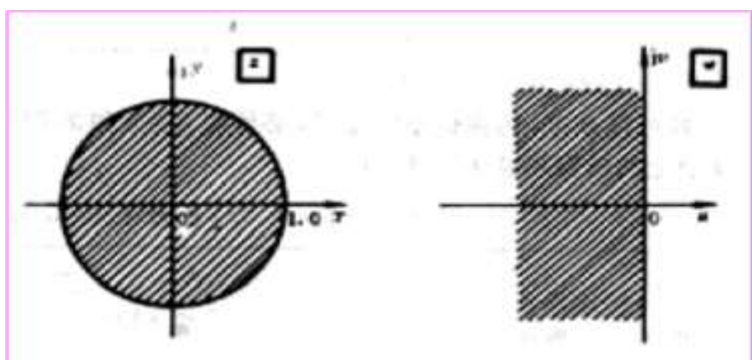


图 7-8　z平面与w平面的对应关系

三、离散系统的稳定性判据

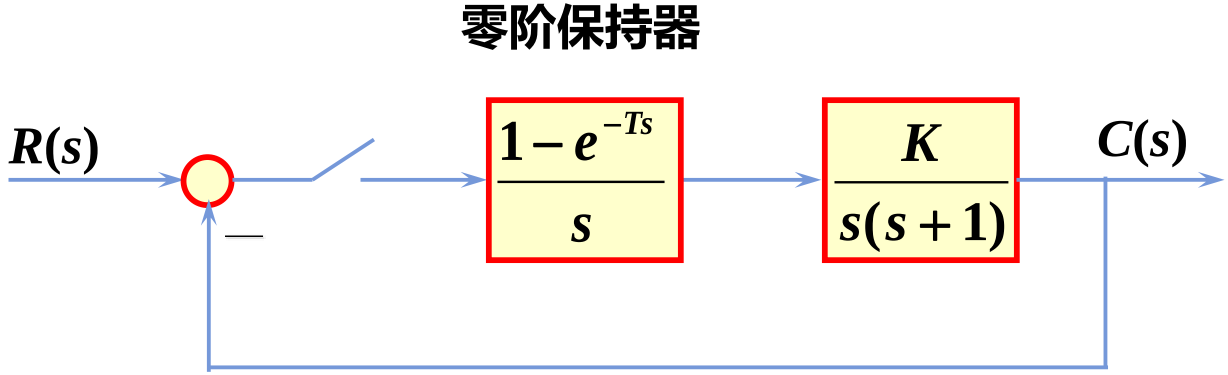
双线性变换与劳斯判据

(1) 双线性变换

$$z=\frac{w+1}{w-1},\qquad w=\frac{z+1}{z-1}$$

(2)劳斯判据

例　设系统的结构图如下图所示，采样周期T=1s 。设K=10,试分析系统的稳定性，并求系统的临界放大系数。



$z=e^{Ts}=e^{s}$

解：（1）**由图得**

$$G(s)=\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+1)}=\frac{10(1-e^{-s})}{s^2(s+1)}$$

查表7-2[12]

$$G(z)=\frac{10(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{3.68z+2.64}{z^2+2.31z+3}$$

$e=2.71828$

$e^{-1}=0.368$

由此得系统特征方程为

$$z^2+2.31z+3=0$$

求解得一对共轭复根

$$\lambda_1=-1.156+j1.29 \qquad \lambda_2=-1.156-j1.29$$

分布在单位圆外，因此系统是不稳定的。

⑵ 由系统开环脉冲传递函数

T=1

$$G(z)=\frac{K(0.368z+0.264)}{z^2-1.368z+0.368}$$

求得系统特征方程为 $D(Z)=1+G(z)$

$$=z^2-(1.368-0.368K)z+0.368+0.264K=0$$

进行w变换得

$$(2.736-0.104K)w^2+(1.264-0.528K)w+0.632K=0$$

列劳氏表计算

$$z=\frac{w+1}{w-1},$$

w^2	$2.736-0.104K$	$0.632K$
w^1	$1.264-0.528K$	0
w^0	$0.632K$	

为使系统稳定，须有

$$\begin{cases}0.632K>0\\1.264-0.528K>0\\2.736-0.104K>0\end{cases}$$

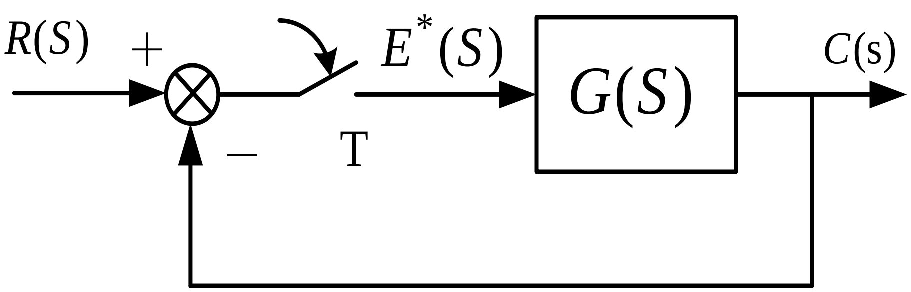
得到系统的临界放大系数为: $K_c=2.4$

8.7 离散控制系统的稳态性能分析

一、采样系统的类型

设采样系统的开环脉冲函数为$G(z)$，当$G(z)$具有0个，1个，2个$z=1$的极点时，系统分别为0型，I型，II型系统。

二、应用终值定理求给定稳态误差终值



设采样系统是单位负反馈系统，则给定误差脉冲传递函数为：

$$\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+GH(z)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)} R(z) \quad \Longleftrightarrow \quad E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e^{*}(t) \qquad\qquad e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

$$= \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) E(z) \quad \Longleftrightarrow \quad = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]} \qquad\qquad = \lim_{s\to 0} s \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

1. 终值定理法

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^{*}(t)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{z[1+G(z)]}$$

2. 误差系数法

(1) 单位阶跃输入时

$r(t)=1(t)$

$$R(z)=\frac{z}{z-1}$$

$$K_p=\lim_{z\to 1}[1+G(z)]$$

$$e_{sr}=\frac{1}{K_p}$$

(2) 单位斜坡输入时

$r(t)=t$

$$R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$K_v=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)$$

$$e_{sr}=\frac{T}{K_v}$$

*T*为采样周期

(3) 单位加速度输入时

$r(t)=t^2/2$

$$R(z)=\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

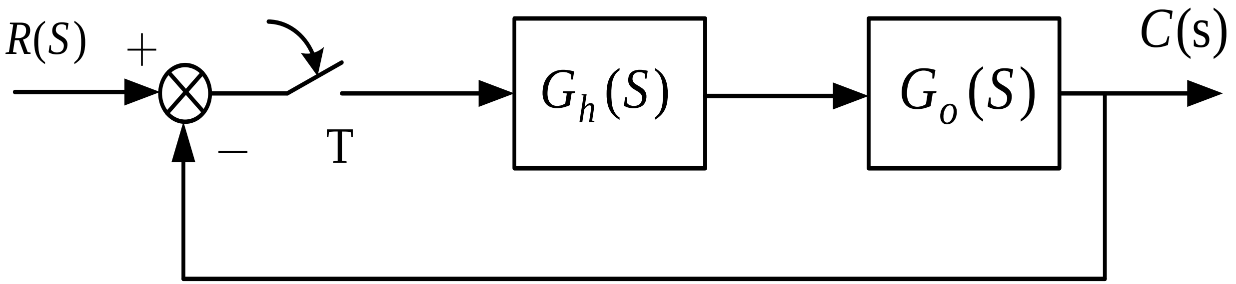
$$K_a=\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$$

$$e_{sr}=\frac{T^2}{K_a}$$

[注：$K_a=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$]

例：采样系统如图，其中零阶保持器的传递函数为 $G_h(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$

被控对象的传递函数为 $G_o(s)=\dfrac{4}{s(0.5s+1)}$，采样周期 T=0.25s，确定系统的类型。



解：1、求系统的开环脉冲传递函数

$$G_h(s)G_o(s)=(1-e^{-TS})[\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{0.5s+1}]$$

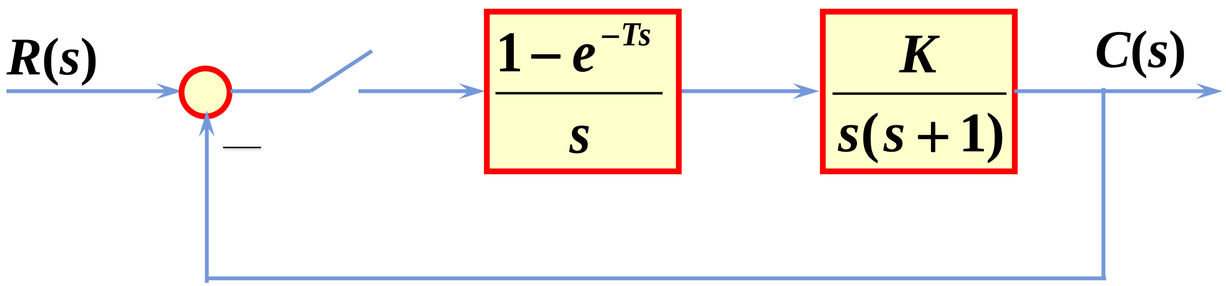
查表得与上式对应的Z变换。系统的开环脉冲传递函数

$$G_hG_o(z)=(1-z^{-1})[\frac{2z}{(z-1)^2}-\frac{2z}{z-1}+\frac{2z}{z-0.368}]$$

$$=\frac{2(0.368z+0.264)}{(z-1)(z-0.368)}$$

2、根据系统的开环脉冲传递函数，系统有一个Z=1的极点，为I型系统。

例　设系统的结构图如下图所示，$K=1$，$T=0.1s$，$r(t)=1(t)+t$，求系统的稳态误差。



解：系统的开环传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$ 表7-2 (12)

把T=0.1代入化简得 $$G(z)=\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}$$

$$K_p=\lim_{z\to1}[1+G(z)]=\lim_{z\to1}\left[1+\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right]=\infty$$

$$K_v=\frac{1}{T}\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\frac{1}{0.1}\lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}=1$$

系统的稳态误差为

$$e(\infty)=\frac{1}{K_p}+\frac{1}{K_v}=1$$

$$K_a=\lim_{z\to1}(z-1)^2G(z)$$

8.8 离散控制系统的动态性能分析

一、时间响应

一般假定外作用为单位阶跃函数$r(t)=1(t)$，此时$R(z)=z/(z-1)$，

$$C(z)=\frac{z}{z-1}\Phi(z)$$

然后用长除法，将$C(z)$展成无穷幂级数：

$$C(z)=C_0+C_1z^{-1}+C_2z^{-2}+\ldots+C_nz^{-n}$$

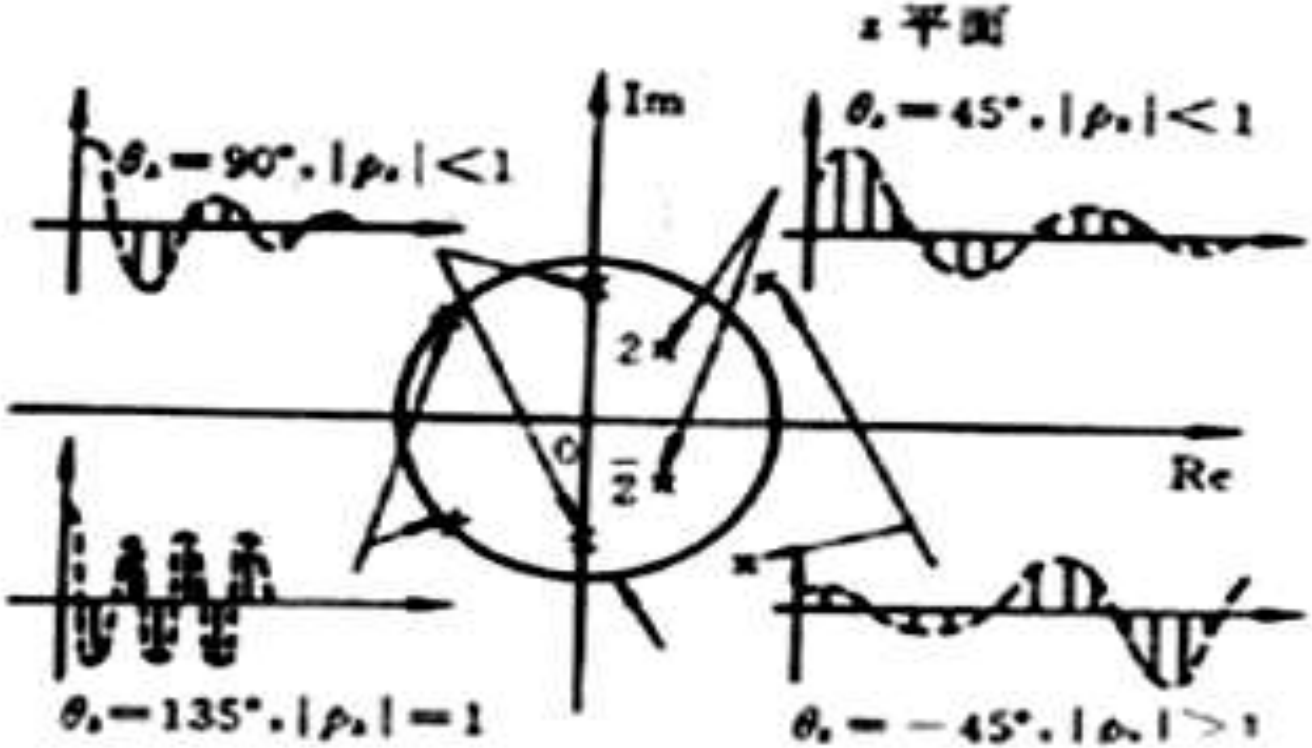
则得单位阶跃作用下的输出序列为

$$C(kT)=C_k\,,\qquad k=0,1,2,\ldots n$$

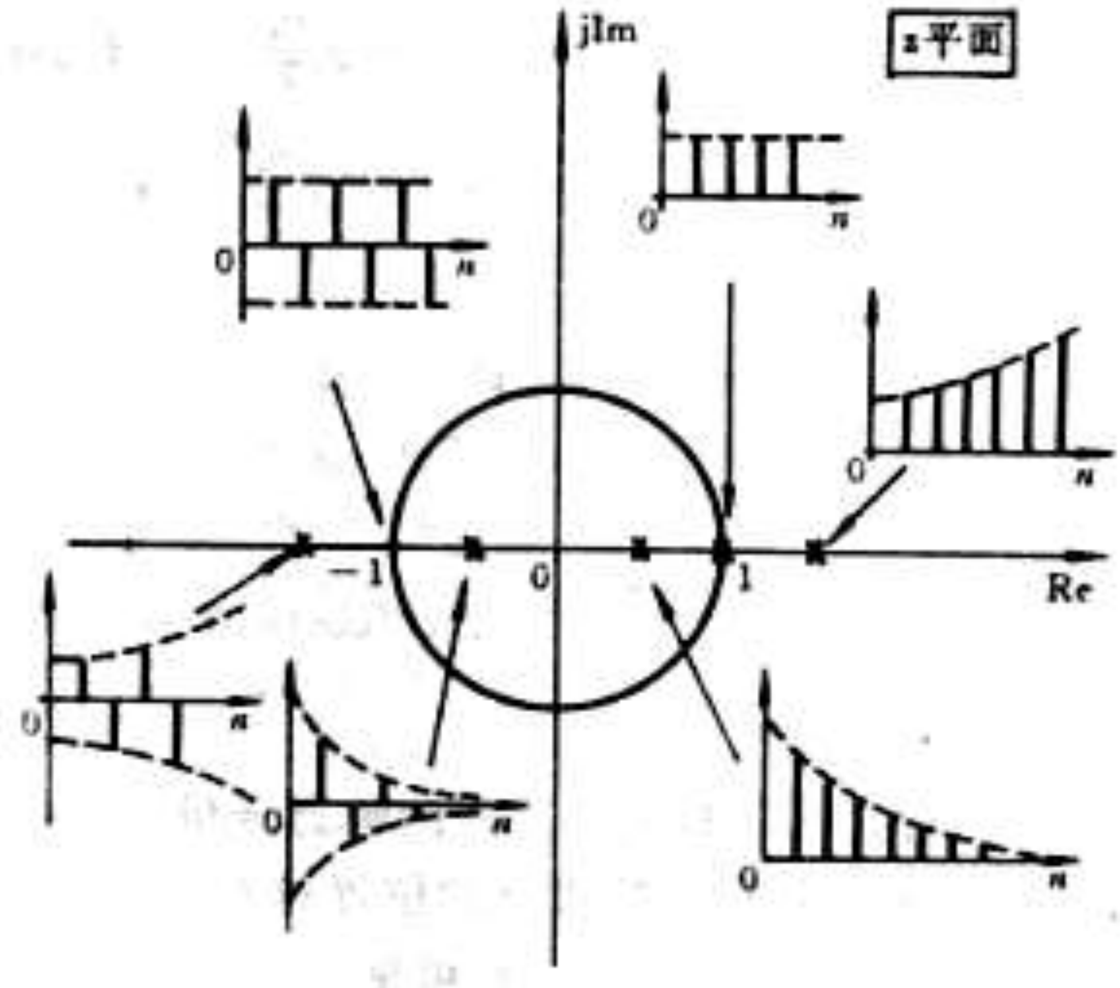
在$C^*(t)$—t坐标中描出点 (kT, C_k), $k=0,1,2,\ldots n$，则得阶跃响应脉冲序列。

将各点用虚线平滑连接，以便分析性能指标。

二、闭环极点与动态响应的关系



7-9 闭环复极点与动态响应的关系



7-10 闭环实极点与动态响应的关系